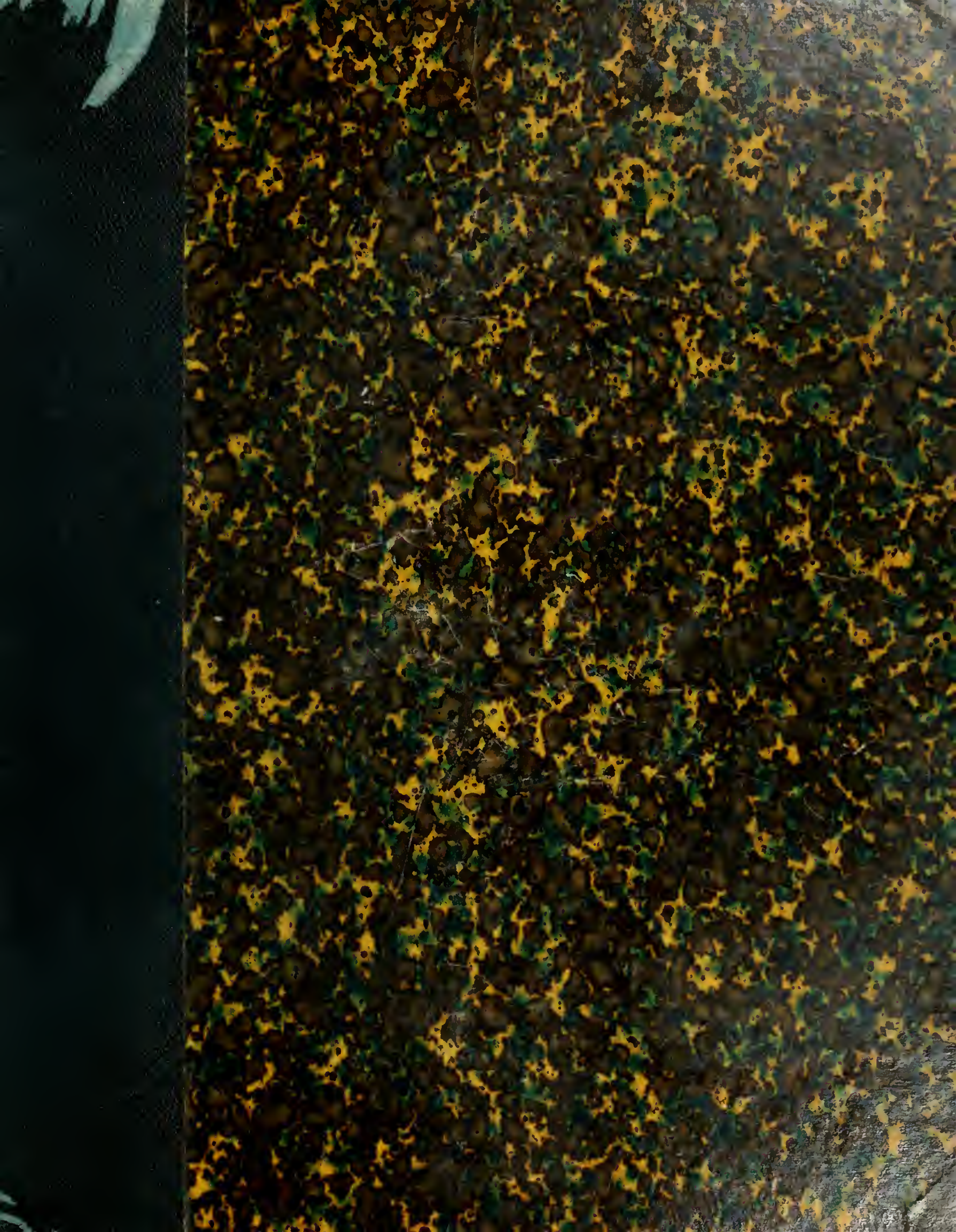
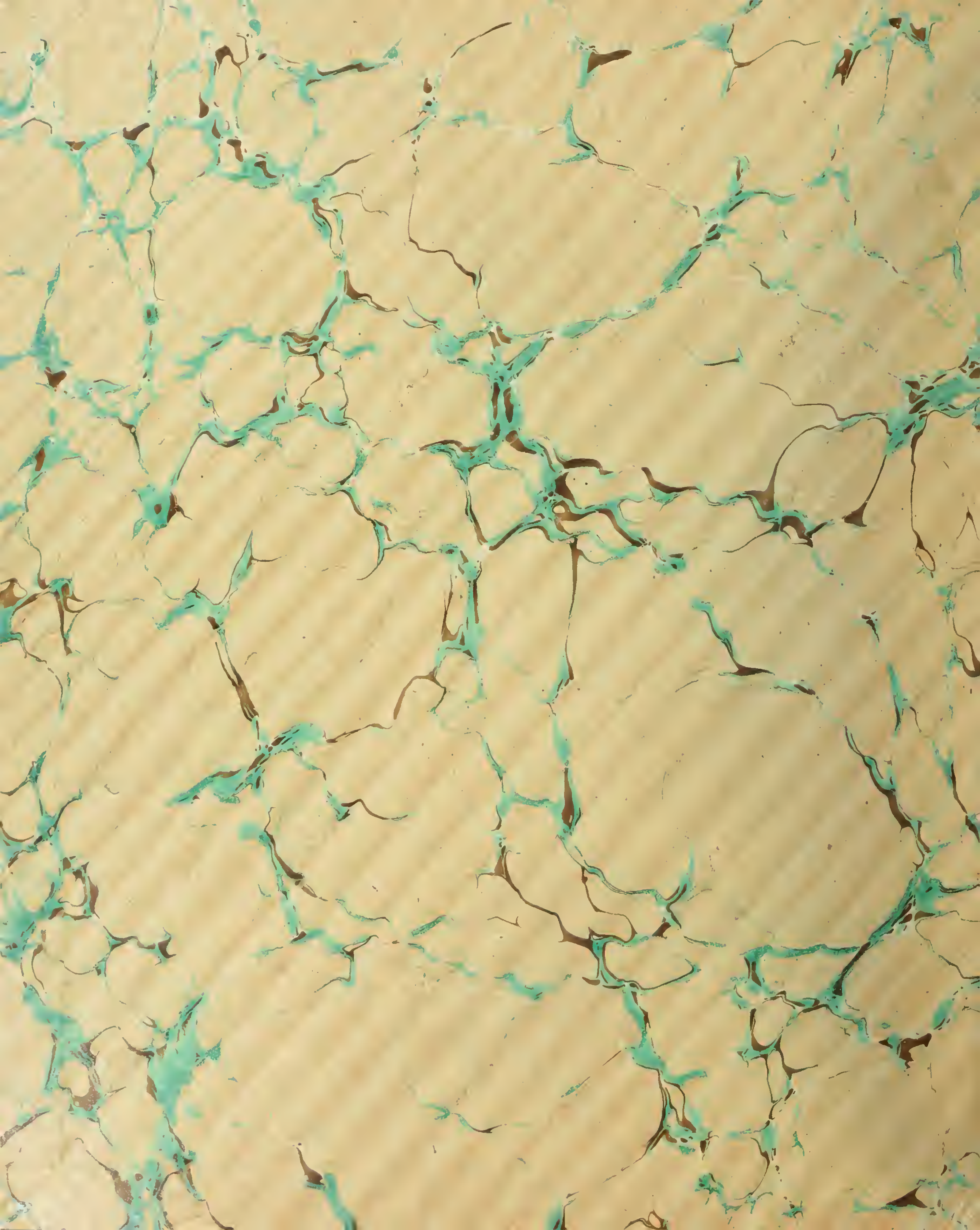
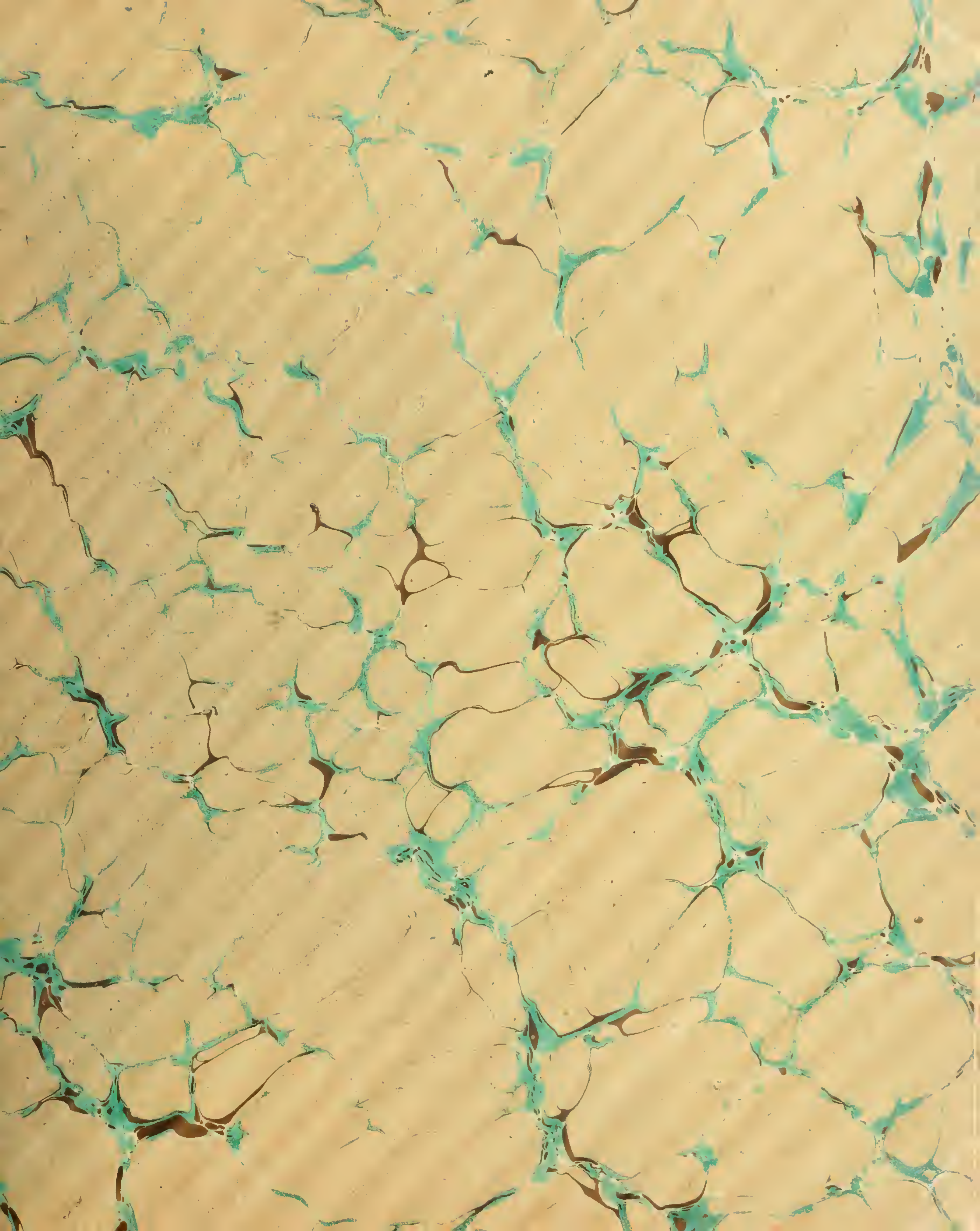






JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

OU

RECUEIL MENSUEL

DE MÉMOIRES SUR LES DIVERSES PARTIES DES MATHÉMATIQUES;

Publié

PAR JOSEPH LIOUVILLE,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES ET DU BUREAU DES LONGITUDES,
PROFESSEUR AU COLLÉGE DE FRANCE.

DEUXIÈME SÉRIE. — TOME XIV. — ANNÉE 1869.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, n° 55.

1869

TABLE DES MATIÈRES.

DEUXIÈME SÉRIE. — TOME XIV.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Extrait d'une Lettre adressée à M. Besge;

PAR M. J. LIOUVILLE.

« . . . Voici un théorème, que vous trouverez peut-être intéressant, concernant la fonction

$$F(k),$$

définie à l'ordinaire comme exprimant le nombre des classes de formes quadratiques binaires, primitives ou non, de déterminant $-k$, dont un au moins des coefficients extrêmes est impair.

» Soit m un nombre impair quelconque donné. Décomposons-le autant de fois qu'il nous sera possible en une somme de deux carrés, en sorte que l'on ait, en nombre entiers,

$$m = a^2 + 4b^2,$$

a étant impair et positif, tandis que b peut être pair ou impair, positif ou négatif, ou encore égal à zéro; puis cherchons la somme

$$(1) \qquad \sum (a^2 - 4b^2)$$

pour l'ensemble de toutes les décompositions. Il faudra, bien entendu, supposer cette somme nulle, s'il n'existe aucune décomposition de m de l'espèce indiquée.

» D'autre part, considérons cette autre somme

$$(2)\qquad \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} iF(4m - i^2),$$

dans le terme général de laquelle i désigne successivement les entiers impairs

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots,\ \omega,$$

dont le dernier ω est tel qu'au delà on cesserait d'avoir

$$4m - i^2 > 0;$$

ω est donc le plus grand entier impair inférieur à $2\sqrt{m}$.

» Cela posé, notre théorème consiste en ce que les sommes (1) et (2) sont égales entre elles. En d'autres termes, on obtient toujours, sous les conditions énoncées,

$$(A)\qquad \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} iF(4m - i^2) = \sum (a^2 - 4b^2),$$

équation qui pourrait encore s'écrire

$$\sum \left(\frac{-1}{i}\right) iF(4m - i^2) = \sum (a^2 - 4b^2),$$

en employant une notation de Legendre, généralisée par Jacobi, au moyen de laquelle on a

$$\left(\frac{-1}{i}\right) = (-1)^{\frac{i-1}{2}}.$$

» Quand l'équation

$$m = a^2 + 4b^2$$

est impossible en nombres entiers, il faudra supposer, comme on l'a dit,

$$\sum(a^2 - 4b^2) = 0;$$

on aura donc alors, plus simplement,

$$\text{(B)} \qquad \sum(-1)^{\frac{i-1}{2}} iF(4m - i^2) = 0,$$

ou, si l'on veut,

$$\sum\left(\frac{-1}{i}\right) iF(4m - i^2) = 0.$$

Il en sera ainsi, par exemple, toutes les fois que l'entier donné m se trouvera $\equiv 3 \pmod{4}$, et dans d'autres cas encore; mais la formule

$$\text{(A)} \qquad \sum(-1)^{\frac{i-1}{2}} iF(4m - i^2) = \sum(a^2 - 4b^2)$$

est la seule formule générale; elle ne comporte aucune exception.

» Ajoutons ici quelques applications numériques, en rappelant d'abord que, d'après la table construite pour la fonction

$$F(k)$$

par un procédé direct, indépendant de notre formule (A), on a :

$$F(3) = 1,\ F(11) = 3,\ F(19) = 3,\ F(27) = 4,\ F(35) = 6,\ F(43) = 3.$$

» Soit d'abord $m = 1$. Comme on a

$$1 = 1^2 + 4.0^2,$$

l'équation (A) donnera

$$F(3) = 1,$$

ce qui est exact.

» Soit ensuite

$$m = 3.$$

Il n'y aura alors aucune décomposition possible de m en une somme de deux carrés, et la formule (B) propre à ce cas donnera

$$F(11) - 3F(1) = 0,$$

partant

$$F(11) = 3,$$

ce qui est exact.

» Prenons à présent $m = 5$. Comme on a

$$5 = 1^2 + 4(\pm 1)^2,$$

il nous viendra ici

$$\sum(a^2 - 4b^2) = 2(1 - 4) = -6.$$

L'équation (A) exige donc que

$$F(19) - 3F(11) = -6,$$

c'est-à dire que

$$F(19) = 3;$$

et cela est effectivement vrai.

» Soit maintenant $m = 7$. L'équation

$$7 = a^2 + 4b^2$$

étant impossible, nous devons avoir, d'après la formule (B), à laquelle la formule (A) se réduit alors :

$$F(27) - 3F(19) + 5F(3) = 0,$$

d'où

$$F(27) = 3.3 - 5.1 = 4,$$

ce qui est exact.

» Soit encore $m = 9$. On aura cette fois

$$9 = 3^2 + 4.0^2,$$

et il n'y a pas d'autre manière d'écrire

$$9 = a^2 + 4b^2,$$

conformément à ce qui a été convenu plus haut. Ici donc, on a

$$\sum(a^2 - 4b^2) = 9.$$

La formule (A) exige donc que

$$F(35) - 3F(27) + 5F(11) = 9;$$

partant, d'après les valeurs déjà vérifiées de

$$F(11)$$

et de

$$F(27),$$

il nous viendra, comme il le faut,

$$F(35) = 6.$$

» Pour dernier exemple, faisons

$$m = 11.$$

L'équation

$$11 = a^2 + 4b^2$$

étant impossible, la formule (A) se réduira à la formule (B) et nous donnera

$$F(43) - 3F(35) + 5F(19) = 0;$$

d'où

$$F(43) = 3,$$

valeur exacte, comme toujours.

« Vous penserez peut-être que j'insiste un peu trop longuement sur des vérifications numériques faciles; mais l'importance que j'attache et que vous attacherez aussi, je l'espère, à la formule générale (A) me servira d'excuse. »

Théorème concernant les nombres entiers $\equiv 5 \pmod{12}$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Il s'agit encore cette fois de la fonction

$$F(k)$$

par laquelle s'exprime le nombre des classes de formes quadratiques binaires (primitives ou non) de déterminant $-k$, dont un au moins des coefficients extrêmes est impair.

Soient m un entier donné $\equiv 5 \pmod{12}$, d un quelconque des diviseurs de m et δ le diviseur conjugué à d, en sorte que l'on ait

$$m = d\delta.$$

Introduisons la notation connue

$$\left(\frac{a}{b}\right)$$

de Legendre, en lui attribuant la signification plus étendue admise depuis Jacobi, et calculons la somme

$$(1) \qquad \sum \left(\frac{3}{\delta}\right) d.$$

Ensuite considérons cette autre somme

$$(2) \qquad \sum{}' F\left(\frac{2m - i^2}{3}\right),$$

où l'on devra prendre pour i les valeurs impaires 1, 5, 7, 11, ..., toutes premières à 3 (circonstance que j'indique par un accent sur le signe sommatoire), en s'arrêtant au moment où l'entier placé sous le

signe F deviendrait négatif; je dis *l'entier*, car dans les circonstances où l'on se place la division par 3 s'effectue toujours.

Cela étant, notre théorème consiste en ce que la somme (1) est quadruple de la somme (2). En d'autres termes, on a toujours, sous les conditions énoncées :

$$(A) \qquad \sum{}' F\left(\frac{2m - i^2}{3}\right) = \frac{1}{4}\sum\left(\frac{3}{\delta}\right) d.$$

Je me bornerai aux deux exemples les plus simples, en faisant $m = 5$, puis $m = 17$.

Pour $m = 5$, la formule (A) donne $F(3) = 1$, résultat exact. Pour $m = 17$, on en déduit

$$F(11) + F(3) = \frac{1}{4}(17 - 1) = 4,$$

partant $F(11) = 3$, ce qui est exact aussi. Le lecteur peut continuer tant qu'il lui plaira ces vérifications faciles.

MÉMOIRE SUR LES LIGNES SPIRIQUES;

Par M. DE LA GOURNERIE.

AVANT-PROPOS.

Les lignes spiriques ou sections planes du tore ont anciennement occupé les Géomètres, comme on le voit dans les savantes Notices historiques que MM. Quetelet et Chasles ont données sur ces courbes [*]; mais, jusque dans ces dernières années, on s'était borné à étudier leurs diverses formes. C'est principalement à cet ordre de recherches que se rapporte le Mémoire de M. Pagani couronné par l'Académie de Bruxelles en 1824.

Depuis cette époque, MM. Yvon Villarceau, J.-A. Serret, Garlin, Cornu, Mannheim et Darboux ont trouvé des théorèmes importants sur les spiriques [**]. Enfin leur théorie a été enrichie des résultats considérables obtenus par MM. Salmon, Moutard, Darboux, Laguerre et Crofton sur les courbes du quatrième ordre qui ont deux points doubles à l'infini sur un cercle, car les spiriques sont une variété de ces lignes [***].

---

[*] M. Quetelet, *Mémoires couronnés par l'Académie de Bruxelles*, t. V; *Correspondance mathématique*, t. II. — M. Chasles, *Aperçu historique*, Note I.

[**] M. Yvon Villarceau, *Comptes rendus*, 1848, 2e série. — M. Serret, *Journal de Mathématiques*, 1843. — MM. Garlin, Cornu, Darboux, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1854, 1859, 1861, 1864. — M. Mannheim, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1860, et *Journal de l'École Polytechnique*, XLe cahier, p. 74.

[***] M. Salmon, *Higher plane curves*, 1852, p. 172. — M. Moutard, *Bulletin de la Société Philomathique*, 1860. — M. Darboux, *Comptes rendus*, 1er août 1864; *Annales de l'École Normale*, 1865, 1866. — M. Laguerre, *Comptes rendus*, 9 janvier 1865. — M. Crofton, *The London mathematical Society*, 1867. — *Voir* aussi l'*Étude des surfaces algébriques* publiée par M. Bertrand dans le *Journal des Savants*, 1867.

Je me propose de faire connaître plusieurs propriétés nouvelles des spiriques, et de présenter une classification de ces courbes.

INTRODUCTION.

Cette Introduction se compose de deux Parties. La première comprend la théorie d'une involution spéciale du quatrième ordre qui nous sera fort utile pour la discussion des spiriques. Dans la seconde, j'établis quelques théorèmes relatifs aux anallagmatiques d'un ordre quelconque. Un grand nombre de propriétés de la spirique sont des corollaires de ces théorèmes, et j'ai pensé qu'il convenait de les démontrer tout d'abord sous leur forme la plus générale.

PREMIÈRE PARTIE.

THÉORIE D'UNE INVOLUTION SPÉCIALE DU QUATRIÈME ORDRE [*].

§ I. — Involution sur une droite.

Définition et détermination des centres d'inversion d'un groupe de quatre points en ligne droite.

1. Dans une involution quadratique, deux points d'un groupe sont réciproques par rapport au cercle qui a pour diamètre le segment compris entre les points doubles; le point central est le centre d'inversion. D'après cela, il paraît convenable d'appeler *centres d'inversion* d'un groupe de quatre points en ligne droite a_1, a_2, a_3, a_4, les points centraux O′, O″, O‴ des involutions quadratiques des quatre points pris deux à deux des trois manières possibles.

---

[*] Sur les involutions d'ordre quelconque, on peut consulter principalement M. Poncelet, *Traité des Propriétés projectives*, t. II, IVe section. — M. de Jonquières, *Annali di Matematica*, 1859. — M. Cremona, *Comptes rendus*, 24 juin 1861; *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane*, 1862. — M. Chasles, *Comptes rendus*, 18 novembre 1861. — M. Salmon, *Modern higher algebra*, 1866, p. 145.

On a

$$O'a_1 . O'a_2 - O'a_3 . O'a_4 = 0,$$
$$O''a_1 . O''a_3 - O''a_2 . O''a_4 = 0,$$
$$O'''a_1 . O'''a_4 - O'''a_2 . O'''a_3 = 0.$$

En désignant par x_1, x_2, x_3, x_4 les abscisses des quatre points du groupe, et par λ', λ'', λ''' celles des centres d'inversion, mesurées les unes et les autres à partir d'une origine fixe, on obtient, à l'aide des relations précédentes,

$$(1)\quad \lambda' = \frac{x_1 x_2 - x_3 x_4}{x_1 + x_2 - x_3 - x_4}, \quad \lambda'' = \frac{x_1 x_3 - x_2 x_4}{x_1 + x_3 - x_2 - x_4}, \quad \lambda''' = \frac{x_1 x_4 - x_2 x_3}{x_1 + x_4 - x_2 - x_3}.$$

J'appellerai λ l'abscisse de l'un quelconque des centres d'inversion.

2. Nous aurons souvent besoin de connaître les abscisses des centres d'inversion en fonction des coefficients de l'équation du quatrième degré qui a pour racines les abscisses des quatre points du groupe. Pour faire cette détermination, je supposerai d'abord que l'origine est au centre des moyennes distances de ces derniers points; alors l'équation n'a pas de second terme

$$(2)\qquad x^4 + qx^2 + sx + t = 0.$$

Je pose

$$x_1 + x_2 = b, \quad x_3 + x_4 = b',$$
$$x_1 x_2 = c, \quad x_3 x_4 = c'.$$

J'exprime λ' et les coefficients de l'équation (2), en fonction des quantités b, c, b', c'; j'ai alors en supprimant l'accent de λ'

$$\lambda = \frac{c - c'}{b - b'}, \quad 0 = b + b', \quad q = bb' + c + c',$$
$$s = -bc' - b'c, \quad t = cc'.$$

J'élimine d'abord b', puis c', et j'obtiens

$$b = \pm\sqrt{\frac{s}{2\lambda}}, \quad c = \frac{1}{2}\left(q + b^2 + \frac{s}{b}\right), \quad 4t = \left(q + b^2 + \frac{s}{b}\right)\left(q + b^2 - \frac{s}{b}\right);$$

portant dans la troisième de ces équations la valeur de b et développant, on a successivement

$$4t = \left(q + \frac{s}{2\lambda}\right)^2 - 2\lambda s,$$

(3) $$\lambda^3 + \frac{4t - q^2}{2s}\lambda^2 - \frac{q}{2}\lambda - \frac{s}{8} = 0.$$

b et c étant la somme et le produit des abscisses x_1 et x_2, ces quantités sont données par l'équation

(4) $$x^2 - \sqrt{\frac{s}{2\lambda}}\,x + \frac{1}{2}\left(q + \frac{s}{2\lambda} + \frac{s}{\sqrt{\frac{s}{2\lambda}}}\right) = 0.$$

L'équation (3) fait connaître les abscisses des centres d'inversion et résout ainsi le problème que je m'étais proposé. J'ai calculé l'équation (4) pour montrer que la fonction (1) conduit à une résolution facile de l'équation du quatrième degré. Je reviendrai sur ce sujet (n^{os} **25-27**).

5. Je vais maintenant examiner le cas où l'origine des abscisses n'est pas au centre des moyennes distances des points du groupe. Au lieu de l'équation (2), nous avons l'équation plus générale

(5) $$x^4 - 4px^3 + qx^2 + sx + t = 0.$$

Je fais disparaître le second terme en posant $x = x_1 + p$:

$$x_1^4 - (6p^2 - q)x_1^2 - (8p^3 - 2pq - s)x_1 - 3p^4 + qp^2 + sp + t = 0.$$

L'origine étant transportée au centre des moyennes distances, je peux appliquer la formule (3); j'obtiens ainsi pour déterminer les abscisses λ_1 des points O′, O″, O‴ l'équation

$$\lambda_1^3 + \frac{48p^4 - 16p^2q - 4sp - 4t + q^2}{2(8p^3 - 2pq - s)}\lambda_1^2 + \left(3p^2 - \frac{q}{2}\right)\lambda_1 + \frac{1}{8}(8p^3 - 2pq - s) = 0.$$

Il faut maintenant revenir à la première origine, et pour cela rem-

placer λ_1 par $(\lambda - p)$. On trouve, après quelques réductions faciles,

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} &(8p^3 - 2pq - s)\lambda^3 + \left(ps - 2p^2q - 2t + \frac{q^2}{2}\right)\lambda^2 \\ &\qquad + \left(4pt - 2p^2s + \frac{qs}{2}\right)\lambda + \left(\frac{s^2}{8} - 2p^2t\right) = 0. \end{aligned} \right.$$

Propriété fondamentale de l'involution spéciale.

4. Je suppose que l'on veuille déterminer les points d'un groupe dont on connaît les trois centres d'inversion O′, O″, O‴.

En prenant sur la droite une origine fixe, on peut représenter les centres d'inversion et les points du groupe par les équations

$$(7)\qquad ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

$$(5)\qquad x^4 - 4px^3 + qx^2 + sx + t = 0.$$

Les coefficients de la première sont connus, et il s'agit d'obtenir ceux de la seconde.

Les centres d'inversion du groupe (5) sont donnés par l'équation (6); nous devons donc avoir, en désignant par k un coefficient indéterminé,

$$8p^3 - 2pq - s = ka,$$

$$ps - 2p^2q - 2t + \frac{q^2}{2} = kb,$$

$$4pt - 2p^2s + \frac{qs}{2} = kc,$$

$$\frac{s^2}{8} - 2p^2t = kd.$$

Les cinq inconnues p, q, s, t, k ne sont soumises qu'à quatre équations; nous pouvons donc nous donner une de ces quantités, par exemple l'abscisse p du centre des moyennes distances des points du groupe.

Éliminant k, on obtient

$$4pb + 2c + qa = 0,$$

$$4pc + 8d + sa = 0,$$

$$(8p^3 - 2pq - s)d - \left(\frac{s^2}{8} - 2p^2 t\right) a = 0.$$

On déduit de ces équations

$$q = -\frac{4pb + 2c}{a}, \quad s = -\frac{4pc + 8d}{a}, \quad t = \frac{c^2 - 4bd}{a^2} - \frac{4pd}{a}.$$

L'équation du groupe cherché est par conséquent

$$(8) \quad ax^4 - 2cx^2 - 8dx + \frac{c^2 - 4bd}{a} - 4p(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 0.$$

5. p est un coefficient arbitraire; en conséquence, et d'après la forme de l'équation, nous voyons qu'*il y a une infinité de groupes de quatre points dont trois points donnés sont les centres d'inversion, et que ces groupes forment une involution.*

En général, dans une involution du quatrième ordre les centres d'inversion varient pour les différents groupes; mais, d'après ce que nous venons de reconnaître, *quand deux groupes de quatre points ont leurs centres d'inversion communs, tous les groupes de l'involution qu'ils déterminent ont les mêmes centres d'inversion.*

Les centres d'inversion forment avec le point de l'infini un des groupes de l'involution. Comme d'ailleurs on peut les construire quand un des autres groupes est connu, *l'involution spéciale* que je considère *est déterminée par un seul groupe de quatre points.* Ainsi, en égard à l'équation (3), l'involution qui comprend le groupe (2) est représentée par l'équation

$$(9) \quad x^4 + qx^2 + sx + t - 4p\left(x^3 + \frac{4t - q^2}{2s}x^2 - \frac{q}{2}x - \frac{s}{8}\right) = 0.$$

Détermination des points d'un groupe de l'involution spéciale quand on connaît l'un d'eux, ou le centre de leurs moyennes distances. — Involutions composantes.

6. Je considère les trois involutions quadratiques qui ont pour points centraux O′, O″, O‴, et auxquels appartiennent respectivement les trois couples O″ et O‴, O‴ et O′, O′ et O″. Ces involutions sont complétement déterminées.

Je prends arbitrairement un point a_1 sur la droite, et je construis les points a_2, a_3, a_4 qui lui sont conjugués dans les trois involutions. On a

$$O'a_1 . O'a_2 = O'O''.O'O''',$$

$$O''a_1 . O''a_3 = O''O'''.O''O',$$

$$O'''a_1 . O'''a_4 = O'''O'.O'''O''.$$

Les deux dernières égalités peuvent être écrites comme il suit :

$$O''a_1 (O'a_3 - O'O'') = - O'O''.O''O''',$$

$$(O''a_1 - O''O''')(O'a_4 - O'O''') = O'O'''.O''O''.$$

Éliminant $O''a_1$ entre ces relations, j'obtiens

$$O'a_3 . O'a_4 = O'O''.O'O'''.$$

Cette équation montre que les points a_3 et a_4 sont conjugués dans la première involution.

On reconnaît de la même manière que a_2 et a_4, a_2 et a_3 sont respectivement conjugués dans les deuxième et troisième involutions; d'où il suit qu'un quelconque des points a_1, a_2, a_3, a_4 est conjugué des trois autres dans les trois involutions quadratiques, et que leurs centres d'inversion sont O′, O″, O‴. Nous avons ainsi un moyen très-simple de déterminer les trois points qui sont conjugués à un point donné dans une involution spéciale du quatrième ordre dont on connaît les centres d'inversion.

J'appellerai *involutions composantes* les involutions quadratiques

qui viennent d'être définies. En considérant l'une d'elles, je dirai que deux couples de points, ou deux segments, sont *conjugués*, lorsqu'ils appartiennent à un même groupe de l'involution du quatrième ordre. Les segments $a_1 a_2$ et $a_3 a_4$ sont conjugués dans la première involution composante.

7. Je désigne les points doubles des trois involutions composantes par e' et f', e'' et f'', e''' et f'''.

O'' et O''' forment un couple de la première involution, et sont par conséquent conjugués harmoniques des points e' et f'. Il suffit donc pour avoir ces derniers points de construire le segment qui a son milieu en O', et qui est conjugué harmonique de O''O'''.

On obtient de la même manière les points doubles de la seconde involution, et ceux de la troisième.

8. Je suppose maintenant que l'on connaisse les trois centres d'inversion, et le centre G des moyennes distances des points qui composent un groupe, et je vais me proposer de déterminer ces points.

En prenant le centre G pour origine, les points du groupe et les centres d'inversion peuvent être représentés par les équations (2) et (3). Je conserverai toutes les notations du n° **1**.

Je rapporte les points du groupe à l'une des involutions composantes, à la première; ils y déterminent deux segments conjugués $a_1 a_2$ et $a_3 a_4$, dont les milieux a_{12} et a_{34} sont situés de part et d'autre, et à égales distances du centre G.

En vertu de l'équation (4) nous aurons

$$Ga_1 + Ga_2 = -\sqrt{\frac{s}{2\lambda}}, \quad Ga_3 + Ga_4 = +\sqrt{\frac{s}{2\lambda}};$$

$$-Ga_{12} = +Ga_{34} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{s}{2\lambda}}.$$

λ', λ'', λ''' étant les abscisses des centres d'inversion, leur produit est de signe contraire et égal au dernier terme de l'équation (3) :

$$s = 8\lambda'\lambda''\lambda'''.$$

La quantité λ sous le radical est la première de ces abscisses, c'est-

à-dire λ'; l'expression trouvée devient en conséquence

$$(10)\qquad -\mathrm{G}a_{12} = +\mathrm{G}a_{34} = \sqrt{\mathrm{GO}''\,\mathrm{GO}'''}.$$

Il résulte de cette équation que *les milieux a_{12} et a_{34} sont conjugués harmoniques des points* O' *et* O''. Comme d'ailleurs on connaît le milieu G du segment $a_{12}a_{34}$, on peut facilement construire ses extrémités.

Le segment $a_1 a_2$ appartenant à la première involution composante est conjugué harmonique du segment $e'f'$. Nous avons son milieu a_{12}, nous pouvons donc le déterminer. On opère de la même manière pour les points a_3 et a_4.

9. D'après ce que nous venons de voir, les segments analogues à $a_{12}a_{34}$, pour les différents groupes de l'involution spéciale, sont conjugués harmoniques de O''O'''; ils forment, par suite, une involution quadratique dont O'' et O''' sont les points doubles.

Dans l'une quelconque des trois involutions composantes, les milieux des segments conjugués forment une involution quadratique dont les points doubles sont les points centraux des deux autres involutions composantes.

Points doubles de l'involution spéciale.

10. En appliquant la construction exposée au n° **8**, on trouve immédiatement que le groupe dont le centre des moyennes distances coïncide avec le point O', se compose des deux points doubles e' et f'. De même les couples de points doubles e'' et f'', e''' et f''' forment chacun un groupe de l'involution du quatrième ordre.

D'après un théorème dû à M. de Jonquières, une involution de l'ordre n possède $2(n-1)$ points doubles. Une involution du quatrième ordre a par conséquent six points doubles. *Dans l'involution spéciale du quatrième ordre les six points doubles sont réunis deux par deux en trois groupes, et coïncident avec les points doubles des involutions composantes.*

Le point e' est conjugué avec lui-même dans la première des trois involutions, et avec le point f' dans les deux autres; il en résulte que les points e' et f' sont conjugués harmoniques des couples de points doubles e'' et f'', e''' et f'''.

Les six points doubles de l'involution spéciale du quatrième ordre forment trois couples de points conjugués harmoniques.

11. Il est important de savoir si une involution du quatrième ordre dans laquelle les six points doubles sont réunis deux à deux en trois groupes, est une involution spéciale telle que je l'ai définie aux nos 4 et 5.

Cette question peut être résolue assez facilement par des considérations sur le nombre des conditions qui déterminent soit une involution spéciale, soit une involution ayant ses points doubles répartis en trois groupes. Mais, pour rendre le raisonnement rigoureux, il serait nécessaire d'entrer dans des détails un peu minutieux, et je préfère examiner directement le problème en comparant les équations.

12. Je considère une involution du quatrième ordre déterminée par deux groupes composés de points doubles, et je vais chercher la condition pour qu'elle possède un troisième groupe également formé de points doubles.

En plaçant l'origine au milieu du segment compris entre les deux points de l'un des deux groupes donnés, l'involution peut être représentée par l'équation

$$(a) \qquad (x^2 + fx + g^2)^2 + k\,(x^2 + g'^2)^2 = 0.$$

Pour que l'involution ait un troisième groupe formé des deux points doubles, il faut qu'une valeur de k autre que zéro et l'infini rende cette équation un carré parfait tel que

$$(b) \qquad x^4 + 2\alpha x^3 + (\alpha^2 + 2\beta^2)x^2 + 2\alpha\beta^2 x + \beta^4 = 0.$$

Égalant les coefficients des différents termes dans les deux équations (a) et (b), j'ai

$$(c) \qquad \begin{cases} \alpha(1+k) = f, \\ (\alpha^2 + 2\beta^2)(1+k) = f^2 + 2g^2 + 2kg'^2, \\ \alpha\beta^2(1+k) = fg^2, \\ \beta^4(1+k) = g^4 + kg'^4. \end{cases}$$

On obtient par l'élimination de α et de β^2

$$(d) \qquad 1 + k = \frac{f^2}{2(g^2 - g'^2)}, \quad g^4 - g'^4 = 0.$$

La seconde de ces équations donne la condition pour qu'il y ait un troisième groupe composé de deux points doubles; la première fait connaître la valeur de k qui détermine ce groupe.

On satisfait à l'équation de condition en faisant g'^2 égal à $+ g^2$ ou à $- g^2$. Lorsque g'^2 est égal à $+ g^2$, k est infini, et le troisième groupe coïncide avec un des deux premiers; à moins toutefois que f ne soit nul, auquel cas ce sont les deux groupes donnés qui se confondent. Si l'on suppose que g'^2 est égal à $- g^2$, c'est-à-dire si les deux groupes donnés sont harmoniques [*], on aura

$$1 + k = \frac{f^2}{4g^2}.$$

Cette expression de $(1 + k)$ introduite dans la première et la troisième des relations (c) donne les valeurs de α et de β^2 qui déterminent le troisième groupe. L'équation (b) devient alors

$$\left(x^2 + \frac{4g^2}{f} x + g^2\right)^2 = 0.$$

Les trois couples de points doubles sont conjugués harmoniques.

Lorsqu'une involution du quatrième ordre possède deux groupes composés chacun de deux points doubles, si ces points sont conjugués harmoniques, l'involution comprend un troisième groupe formé de points doubles; s'ils ne sont pas conjugués harmoniques, les deux derniers points doubles de l'involution appartiennent à des groupes distincts.

---

[*] Deux couples de points représentés par les équations

$$x^2 + fx + g^2 = 0, \quad x^2 + g'x + g'^2 = 0,$$

sont conjugués harmoniques lorsque l'on a

$$g^2 + g'^2 = \frac{ff'}{2}.$$

(*Géométrie supérieure*, p. 45.)

13. Les abscisses des milieux des segments formés par les trois couples de points doubles sont

$$-\frac{f}{2}, \quad 0, \quad -\frac{2g^2}{f}.$$

Il est facile, à l'aide de la formule (8), de déterminer l'involution spéciale qui a ces trois points milieux pour centres d'inversion. On trouve

$$x^4 - 2g^2x^2 + g^4 - 4p\left(x^3 + \frac{f^2+4g^2}{2f}x^2 + g^2x\right) = 0.$$

Cette équation représente précisément la même involution que l'équation (a) lorsqu'on y a fait g'^2 égal à $(-g^2)$. La relation qui existe entre les coefficients arbitraires k et p, est

$$2p(1+k) = -f.$$

Quand une involution du quatrième ordre a trois groupes composés de points doubles, tous ses groupes ont pour centres d'inversion les milieux des segments compris par les trois couples de points doubles.

14. Nous savons qu'un groupe est déterminé par la position du centre des moyennes distances des points qui le composent, et que quand ce centre coïncide avec un des centres d'inversion, le groupe se réduit aux deux points doubles correspondants. Comme d'ailleurs dans la série des groupes chaque point double est la transition de deux points réels à un couple de points imaginaires, on voit que lorsque le centre des moyennes distances supposé mobile sur la droite passe par un centre d'inversion, si les points doubles sont réels, les points réels des groupes deviennent imaginaires, tandis que les points imaginaires sont remplacés par des points réels.

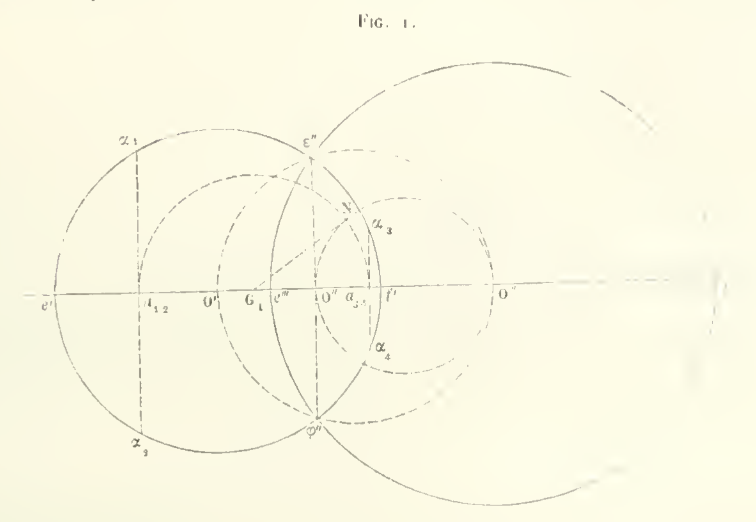
Discussion de l'involution spéciale.

15. *Cas où les centres d'inversion sont tous réels, distincts, et à distance finie.* — 1° Je suppose les points O′, O″, O‴ placés dans l'ordre où je les désigne.

Je décris un cercle sur O′O‴ comme diamètre, et j'élève en O″ une

perpendiculaire à l'axe O′O″O‴. Cette droite rencontre le cercle en deux points ε'' et φ''.

Fig. 1.



Si l'on fait passer par ε'' et φ'' une série de cercles, leurs intersections avec l'axe formeront une involution quadratique ayant son point central en O″. Cette involution est la seconde des involutions composantes, car les points O′ et O‴ en forment un couple.

Les points e' et f' d'une part, e''' et f''' de l'autre, appartiennent à cette involution, parce qu'ils sont conjugués harmoniques de e'' et f'' (n° **10**); les segments qu'ils déterminent ont leurs milieux aux points O′ et O‴ : ces points sont donc les intersections de l'axe avec les cercles qui passent par les points ε'' et φ'', et qui ont respectivement pour centres les points O′ et O‴. Les deux cercles se coupent à angle droit.

2° Le groupe dont le centre G des moyennes distances est en O″, se compose des deux points doubles imaginaires e'' et f''. Si le centre G quitte le point O″ et s'avance vers la gauche, les points du groupe se séparent, mais ils ne peuvent devenir réels tant que le point G n'a pas atteint le point O′ (n° **14**) : à ce moment, le groupe se compose des points doubles réels e' et f'. Si le point G va de O′ à l'infini, l'un des points qui étaient en e' s'éloigne aussi à l'infini, l'autre se transporte en O′, et les deux qui étaient en f' se rendent l'un en O″, l'autre en O‴. Lorsque le centre G vient de l'infini en O″, le point qui se trouvait à

l'infini, et celui qui coïncidait avec O‴, se rejoignent en f'''; les deux autres vont en e'''. Enfin quand le centre G dépasse O‴, les points deviennent imaginaires.

Quand les trois centres d'inversion sont réels et distincts, les quatre points d'un groupe sont tous imaginaires ou tous réels, suivant que le centre de leurs moyennes distances est sur le segment de l'axe compris entre les centres d'inversion extrêmes, ou en dehors de ce segment.

3° Arrêtons-nous quelques instants au cas où les points du groupe sont imaginaires. Le centre des moyennes distances est alors entre O′ et O‴. Je le suppose au point G_1 sur le segment O′O″.

Je rapporte à la première involution composante les quatre points a_1, a_2, a_3, a_4 du groupe considéré. Alors pour déterminer les milieux a_{12} et a_{34} des segments $a_1 a_2$ et $a_3 a_4$, j'ai l'équation (n° **8**)

$$-G_1 a_{12} = +G_1 a_{34} = \sqrt{G_1 O''.G_1 O'''}.$$

Je trace un cercle sur O″O‴ comme diamètre ; je lui mène la tangente G_1N, et je décris le demi-cercle $a_{12} N a_{34}$ dont le centre est en G_1. Le point G_1 étant placé entre O″ et O‴, la construction est possible; elle donne les points a_{12} et a_{34} situés sur le segment $e'f'$.

Nous avons

$$O'a_1 + O'a_2 = 2O'a_{12}, \quad O'a_1.O'a_2 = \overline{O'e}^2.$$

$O'a_1$ et $O'a_2$ sont donc les racines de l'équation

$$x^2 - 2O'a_{12}x + \overline{O'e}^2 = 0,$$

d'où

$$O'a_1 = O'a_{12} + \sqrt{\overline{O'e'}^2 - \overline{O'a_{12}}^2}\sqrt{-1},$$

$$O'a_2 = O'a_{12} - \sqrt{\overline{O'e'}^2 - \overline{O'a_{12}}^2}\sqrt{-1}.$$

Si nous considérons $\sqrt{-1}$ comme un signe de perpendicularité, ces valeurs détermineront les points α_1 et α_2 du cercle $e'f'$. En raisonnant de la même manière sur a_{34}, on trouve les points α_3 et α_4. Je dirai que les quatre points α_1, α_2, α_3, α_4 sont *figuratifs* des points imaginaires qui composent le groupe. On peut regarder les points réels sur l'axe comme ayant des figuratifs qui coïncident avec eux.

4° Quand le centre G est en O′, les points du groupe sont réunis à leurs figuratifs en e' et en f'. Si le point G avance de O′ en O″, les points du groupe deviennent imaginaires, leurs points figuratifs parcourent le cercle $e'f'$, et finissent par se rejoindre deux à deux en ε'' et en φ''. Le centre G continuant à se mouvoir de O″ en O‴, les points figuratifs se séparent, et décrivent le cercle $e'''f'''$: deux d'entre eux vont en e''', et les autres en f'''.

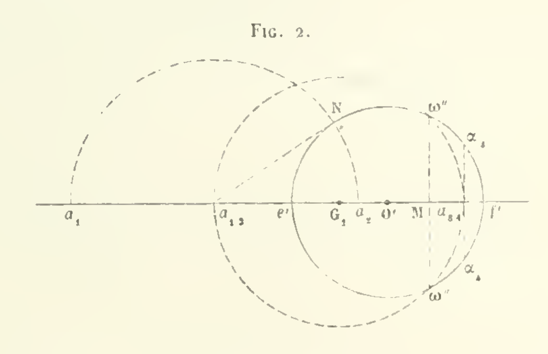
Les points ε'' et φ'' sont les figuratifs des points doubles imaginaires e'' et f'' de la seconde involution composante [*].

Chacun des cercles $e'f'$ et $e'''f'''$ doit être considéré comme orthogonal au cercle imaginaire décrit sur $e''f''$ comme diamètre, car le carré de la distance des centres est égal à la somme des carrés des rayons. Ainsi on a

$$\overline{O'O''}^2 = \overline{O'\varepsilon''}^2 + \left(-\overline{O''\varepsilon''}^2\right).$$

16. *Cas où deux des centres d'inversion sont imaginaires.* — 1° Soient O′ le point central réel, ω'' et ω''' les points figuratifs des centres d'inversion imaginaires O″ et O‴.

Fig. 2.



Pour déterminer les points doubles e' et f' de la première involution

[*] M. Transon a déjà remarqué que les deux points d'où l'on voit sous des angles égaux et formés dans le même sens, les segments compris entre les points homologues de deux divisions homographiques sur une même droite, sont donnés par l'expression analytique des abscisses des points doubles, lorsque l'on y considère $\sqrt{-1}$ comme un signe de perpendicularité. (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1868, p. 258.)

composante, nous avons l'équation

$$\overline{O'e'}^2 = \overline{O'f'}^2 = O'O''.O'O''' = (O'M + M\omega''\sqrt{-1})(O'M - M\omega''\sqrt{-1});$$

d'où

$$-O'e' = +O'f' = O'\omega''.$$

Je décris un cercle du point O' comme centre avec $O'\omega''$ pour rayon; ses intersections avec la droite sont les points doubles e' et f' de la première involution composante.

2° Je suppose maintenant qu'on veuille déterminer les quatre points a_1, a_2, a_3, a_4 d'un groupe dont le centre des moyennes distances G_1 est connu. Je rapporte les points à la première involution composante, et je vais chercher par la méthode expliquée au n° **8** les milieux a_{12} et a_{34} des segments $a_1 a_2$ et $a_3 a_4$.

On a immédiatement

$$\overline{G_1 a_{12}}^2 = \overline{G_1 a_{34}}^2 = G_1 O''.G_1 O''' = \overline{G_1 \omega''}^2.$$

Le cercle décrit du point G_1 comme centre avec $G_1\omega''$ pour rayon détermine les points a_{12} et a_{34}. Quelle que soit la position G_1 du centre G, l'un de ces points est sur le segment $e'f'$, et l'autre en dehors.

Les segments $a_1 a_2$ et $a_3 a_4$ sont conjugués harmoniques de $e'f'$, et ont respectivement pour milieu a_{12} et a_{34}. On construit le premier sans difficulté, puis, raisonnant comme au n° **15**, 3°, on trouve que a_3 et a_4 sont imaginaires, et que leurs figuratifs α_3 et α_4 se trouvent aux intersections du cercle $e'f'$ avec la perpendiculaire élevée à l'axe par le point a_{34}.

Chacun des groupes contient deux points réels et deux points imaginaires.

3° Quand le centre G parcourt la droite, les points réels la parcourent également, et les points figuratifs des points imaginaires se meuvent sur le cercle qui a pour diamètre le segment compris entre les deux points doubles réels de l'involution. Le groupe se compose de ces points lorsque le centre G est en O'. Si le centre G se rend à l'infini, en décrivant la partie de la droite sur laquelle est le point e', les deux

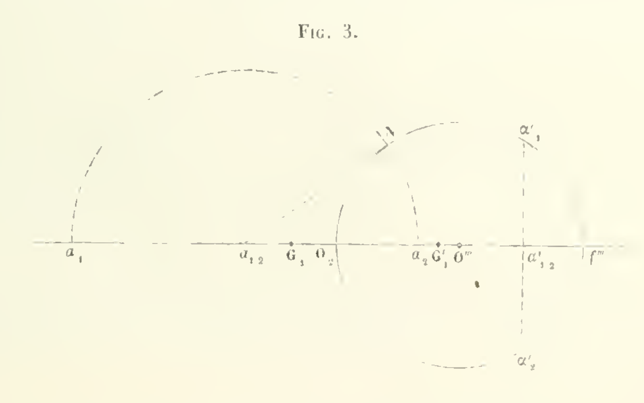
points qui étaient en e' se séparent et restent réels; ils vont l'un à l'infini, et l'autre en O'. Les deux points qui se trouvaient en f' deviennent imaginaires; leurs figuratifs décrivent les arcs $f'\omega''$, $f'\omega'''$.

Lorsque le point G revient de l'infini en O' par le côté où se trouve le point f', les points réels parcourent les segments $\infty f'$ et $O'f'$, tandis que les points figuratifs des imaginaires se rendent en e' par les arcs $\omega''e'$ et $\omega'''e'$.

17. 1° *Cas où deux des centres d'inversion coïncident.* — L'involution n'a en réalité que deux centres d'inversion, l'un double O_2, l'autre simple O'''. On trouve immédiatement que les points doubles des deux premières involutions composantes, et l'un de ceux de la troisième, sont en O_2, et que le second point double f''' de cette dernière est placé à une distance de O''' égale à O_2O''', de manière que le point O''' se trouve au milieu du segment O_2f'''.

Considérons sur la droite un point quelconque a_1 : ses conjugués sont un point a_2 dans la troisième des involutions composantes, et le point O_2 dans les deux premières. *L'involution du quatrième ordre se réduit donc à une involution quadratique, à chacun des groupes de laquelle on ajoute un de ses points doubles qui compte pour deux.* Un groupe particulier est formé de ce seul point pris quatre fois.

Fig. 3.



2° Si l'on donne le centre G des moyennes distances des points a_1, a_2, O_2 et O_2 d'un groupe, on aura immédiatement le milieu a_{12} du segment a_1a_2.

Lorsque le centre G se meut sur la droite, tant qu'il n'est pas entre

les points O_2 et O'', le point a_{12} est en dehors du segment $O_2 f'''$, et les points a_1 et a_2 sont réels. Mais quand G va de O_2 en f''', a_{12} parcourt le segment $O_2 f'''$, les points a_1 et a_2 sont imaginaires, et leurs points figuratifs α_1 et α_2 décrivent le cercle qui a pour diamètre $O_2 f'''$.

18. *Cas où les trois centres d'inversion sont réunis en un seul.* — Lorsque les centres d'inversion coïncident en un point O_3, les points doubles des involutions composantes sont en O_3, et on forme un groupe de l'involution du quatrième ordre, en associant un point quelconque de la droite, au point O_3 pris trois fois. Le groupe ne contient jamais de points imaginaires, quelle que soit la position du centre G.

19. *Cas où deux des centres d'inversion sont distincts* (*réels ou imaginaires*), *et où le troisième est à l'infini.* — Soit O''' le point à l'infini. On trouve immédiatement que les points doubles e', f', e'', f'' coïncident à l'infini. Les points e''', f''' sont conjugués harmoniques de $e'f'$, et puisque ces derniers sont réunis, un des premiers f''' est confondu avec eux à l'infini. Comme d'ailleurs les points e''', f''' sont aussi conjugués harmoniques de O', O'', le point e''' est au milieu du segment compris entre ces deux centres d'inversion.

D'après cela, si nous prenons arbitrairement un point a_1, ses conjugués a_2 et a_3 dans les deux premières involutions composantes seront à l'infini, et son conjugué a_4, dans la troisième, se trouvera de l'autre côté de e''' et à la même distance. En résumé, *chaque groupe comprend deux points à l'infini, et deux autres réels ou imaginaires dont le milieu est* e'''. *Le centre* G *des moyennes distances est fixe à l'infini.*

20. *Cas où deux des centres d'inversion coïncident et où le troisième est à l'infini.* — Prenons arbitrairement les abscisses x_1 et x_2 de deux points d'un groupe, et déterminons les abscisses x_3 et x_4 des deux autres par les relations

$$x_1 + x_4 = 0, \quad x_2 + x_3 = 0.$$

Les équations (1) donnent

$$\lambda' = \lambda'' = 0, \quad \lambda''' = \infty.$$

Nous voyons que *quand deux des centres d'inversion coïncident, et que le troisième est à l'infini, on peut composer un groupe en associant à deux points choisis arbitrairement ceux qui leur sont symétriques par rapport au centre d'inversion double.* Dans ce cas, il n'y a plus d'involution.

Propriétés d'un groupe de points figuratifs

21. Soient a_1, a_2, a_3, a_4 quatre points d'un groupe d'une involution spéciale et x_1, x_2, x_3, x_4 leurs abscisses. Si les deux premiers sont imaginaires conjugués, et les deux derniers également imaginaires conjugués, les coordonnées de leurs points figuratifs seront

$$x' = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y' = \pm \frac{x_1 - x_2}{2}\sqrt{-1};$$

$$x'' = \frac{x_3 + x_4}{2}, \quad y'' = \pm \frac{x_3 - x_4}{2}\sqrt{-1}.$$

On a immédiatement

$$x'^2 + y'^2 = x_1 x_2, \quad x''^2 + y''^2 = x_3 x_4.$$

Je place l'origine au point central O′ de l'involution composante dans laquelle a_1 et a_2, a_3 et a_4 sont deux couples de points conjugués. Les quantités $x_1 x_2$ et $x_3 x_4$ sont alors égales entre elles et au carré du rayon du cercle qui a pour diamètre le segment $e'f'$ compris entre les points doubles de l'involution composante dont le point central est O′. Les quatre points figuratifs se trouvent donc sur ce cercle, ainsi que nous l'avons reconnu au n° **15**, 3°.

22. La droite qui passe par les deux points (x', y') et (x'', y'') rencontre l'axe O′O″O‴ en un point dont l'abscisse est

$$x = \frac{x'y'' - y'x''}{y'' - y'}.$$

En portant dans cette expression les valeurs ci-dessus de x', y', x'' et y'', on trouve, suivant qu'on adopte pour y' et y'' des signes diffé-

rents ou le même signe,

$$x = \frac{x_1 x_3 - x_2 x_4}{x_1 + x_3 - x_2 - x_4}, \quad x = \frac{x_1 x_4 - x_2 x_3}{x_1 + x_4 - x_2 - x_3}.$$

Ces abscisses déterminent les points O″ et O‴ (nº **1**). Ainsi les droites $\alpha_1 \alpha_4$ et $\alpha_2 \alpha_3$ (*fig.* 1) se croisent en O″; les droites $\alpha_1 \alpha_3$ et $\alpha_2 \alpha_4$ se rencontrent en O‴.

23. Les trois cercles $e'f'$, $e''f''$ et $e'''f'''$ étant rectangulaires (nº **15**), deux points de l'un d'eux situés sur une droite passant par le centre d'un des deux autres sont réciproques par rapport à ce dernier. En conséquence, et d'après la proposition du numéro précédent, les points α_1, α_2, α_3, α_4 (*fig.* 1) sont deux à deux réciproques par rapport aux cercles $e''f''$ et $e'''f'''$, de telle sorte que l'on a

$$O''\alpha_1 . O''\alpha_4 = \overline{O''e''}^2 = -\overline{O''\varepsilon''}^2,$$

$$O'''\alpha_1 . O'''\alpha_3 = \overline{O'''e'''}^2.$$

24. On peut résumer comme il suit les propositions établies dans ce paragraphe.

Dans une involution spéciale du quatrième ordre, lorsque les points d'un groupe deviennent imaginaires, leurs points figuratifs sont sur le cercle qui a pour diamètre le segment compris entre les points doubles de l'involution composante à laquelle appartiennent les deux couples de points conjugués imaginaires qui constituent le groupe. Ces points figuratifs sont réciproques deux à deux par rapport aux cercles qui ont respectivement pour diamètre les segments compris entre les points doubles des deux autres involutions composantes.

J'appellerai ces cercles *cercles d'inversion.*

On conclut de ce qui précède et par les propriétés des quadrilatères, que *les deux points de l'axe sur lesquels se projettent les quatre points d'un groupe appartenant au cercle d'inversion* O′, *sont conjugués harmoniques des points* O″ *et* O‴. Cette proposition peut être déduite immédiatement du théorème du nº **9**.

J'appellerai *involution spéciale complète* l'involution spéciale dans laquelle on considère, outre les points réels, les points figuratifs des points imaginaires des groupes, pour toutes les positions du centre des moyennes distances.

Le groupe α_1, α_2, α_3, α_4 (*fig.* 1) appartient à l'involution spéciale complète déterminée par les centres d'inversion O', O'', O'''.

Application de l'involution spéciale à la résolution de l'équation du quatrième degré.

25. Les formules relatives à l'involution spéciale peuvent servir à résoudre l'équation générale du quatrième degré : il suffit de considérer cette équation comme représentant un groupe de quatre points. En choisissant une des racines de l'équation du troisième degré qui fait connaître les abscisses des centres d'inversion, on détermine celle des involutions composantes à laquelle on veut rapporter les points du groupe ; ils y forment deux couples conjugués et dépendent par conséquent de deux équations du second degré dont les coefficients sont faciles à déterminer.

Les formules sont simples quand on a eu le soin de faire disparaître le second terme de l'équation. Je les ai données dès le commencement de ce travail, au n° **2**.

Les calculs auxquels on est conduit sont analogues à ceux des méthodes adoptées pour la résolution de l'équation du quatrième degré ; mais les équations ont une signification géométrique bien déterminée, et les singularités qu'elles présenteraient dans diverses questions pourraient indiquer des théorèmes intéressants.

26. Il est facile d'appliquer à l'équation du quatrième degré les résultats géométriques que j'ai obtenus dans le paragraphe précédent. Les énoncés qui suivent s'appliquent à l'équation (2) dont le second terme est nul, et à la résolvante (3).

Quand les racines de la résolvante sont réelles et distinctes, suivant qu'elles ont ou qu'elles n'ont pas toutes les trois le même signe, les racines de la proposée sont toutes réelles ou toutes imaginaires, et d'ailleurs inégales (n° **15**).

Lorsque deux racines de la résolvante sont imaginaires, deux des racines de la proposée sont imaginaires et les deux autres réelles (n° **16**).

Quand la résolvante a une racine double, cette même racine est double dans la proposée; les deux autres racines de la proposée sont réelles ou imaginaires, suivant que la racine simple de la résolvante est ou non de même signe que la racine double (n° **17**).

Si la résolvante a une racine triple, la proposée possède cette même racine triple (n° **18**).

Lorsque le coefficient s est nul, deux des racines de la résolvante sont nulles et la troisième infinie. Les formules deviennent illusoires, mais l'équation proposée ne contenant l'inconnue qu'à des puissances paires, sa résolution ne présente aucune difficulté.

27. On peut modifier l'équation (4) de manière à avoir les racines de la proposée en fonction des abscisses des trois centres d'inversion. En vertu de l'équation (3), j'ai

$$s = 8\lambda'\lambda''\lambda''', \quad q = -2(\lambda'\lambda'' + \lambda''\lambda''' + \lambda'''\lambda').$$

Je porte ces valeurs dans l'équation (4), et, résolvant, je trouve

$$(11) \qquad x = \sqrt{\lambda''\lambda'''} \pm \sqrt{\lambda'(\lambda'' + \lambda''') - 2\lambda'\sqrt{\lambda''\lambda'''}}.$$

Les deux points que l'on obtient en donnant successivement les deux signes au grand radical et un seul au petit sont conjugués dans l'involution dont le point central a pour abscisse λ'.

Cette formule nous sera utile.

§ II. — Involution sur un cercle.

28. On reporte sur une conique une involution rectiligne en prenant pour projetantes des droites qui divergent d'un point de cette courbe. Quand la conique est un cercle, on peut représenter l'involution par une équation analogue à l'équation générale des involutions rectilignes, mais dans laquelle la tangente de la moitié de l'angle au centre remplace l'abscisse inconnue.

Les involutions circulaires sont utiles dans diverses questions, notamment dans celles où l'on est conduit à transformer par rayons vecteurs réciproques une figure sur laquelle se trouve une involution rectiligne.

Involution quadratique circulaire.

29. On obtient avec la plus grande facilité les résultats suivants :

1° *Dans une involution quadratique circulaire, les points conjugués sont situés sur des droites qui divergent d'un point fixe* P. J'appellerai ces lignes *rayons d'involution. Les points doubles sont ceux où la tangente du cercle est un rayon d'involution. Le produit des distances de* P *à deux points conjugués est constant, et par suite le point* P *est un centre d'inversion.*

2° *Une série de cercles passant par deux points* M *et* N *déterminent sur un cercle fixe une involution quadratique. Le centre d'inversion* P *est sur la droite* MN.

3° *Si l'on transforme* (*) *un cercle* C *portant une involution quadratique, on obtient un cercle* C_1 *ayant une involution du même genre. Les centres d'inversion* P *et* P_1 *sont en ligne droite avec le pôle* Ω *de la transformation.*

Involution quadratique circulaire complète.

30. On peut facilement déterminer les points figuratifs des points conjugués imaginaires dans une involution quadratique circulaire.

Soit C le cercle qui porte l'involution, P son centre, R la longueur de son rayon, P′ le point de convergence, e et f les points doubles. La droite menée par P′ et faisant avec P′P un angle ω coupe le cercle en deux points conjugués a_1 et a_2. On a

$$P'a_1 = P'P\cos\omega \pm \sqrt{R^2 - \overline{P'P}^2\sin^2\omega}.$$

Si le rayon d'involution déterminé par l'azimut ω ne coupe pas le cercle C, la quantité soumise au radical est négative. Je porte alors la

(*) Toutes les transformations dont il est ici question sont *par rayons vecteurs réciproques.*

longueur donnée par ce radical sur la droite H perpendiculaire au rayon d'involution et passant par le milieu a_{12} du segment imaginaire $a_1 a_2$. La ligne H fait avec PP′ un angle complémentaire de ω. Appelant α_1 et α_2 les points figuratifs des conjugués imaginaires a_1 et a_2, on a

$$P\alpha_1 = PP' \sin\omega \pm \sqrt{\overline{PP'}^2 \sin^2\omega - R^2}.$$

Cette équation montre que le lieu des points α_1 est un cercle C′ qui a son centre en P′, et qui coupe orthogonalement le cercle C aux points e et f. La droite $\alpha_1 \alpha_2$ passe par le point P.

Quand deux cercles se coupent à angle droit, les involutions quadratiques déterminées sur eux par les rayons issus réciproquement de leurs centres sont telles, que dans chacune d'elles les points conjugués réels sont figuratifs des points conjugués imaginaires de l'autre. Les deux involutions ont les mêmes points doubles. Je dirai qu'elles sont *complémentaires figuratives*, et qu'elles forment une *involution quadratique circulaire complète.*

51. *La transformation des cercles* C *et* C′ *donne deux autres cercles rectangulaires* C_1 *et* C'_1; *les couples de points des involutions formées sur chacun d'eux par les rayons divergeant du centre de l'autre correspondent aux couples de points des involutions des premiers cercles.*

Si le pôle de transformation était sur C, *le cercle réciproque* C_1 *se réduirait à une droite portant une involution quadratique, et* C'_1 *serait un cercle ayant pour diamètre le segment compris entre les points doubles.*

Involution circulaire spéciale du quatrième ordre.

52. Quatre points sur un cercle peuvent être considérés comme les sommets d'un quadrilatère : je dirai que les points de rencontre des côtés opposés et des diagonales de ce quadrilatère, sont les *trois centres d'inversion* relatifs au groupe des quatre points donnés.

1° *En général, dans une involution circulaire du quatrième ordre les centres d'inversion varient pour les différents groupes; mais si deux groupes ont les mêmes centres d'inversion, ces points sont les*

centres d'inversion pour tous les groupes, et l'involution comprend tous les groupes dont ces points sont les centres d'inversion.

J'appellerai cette involution *circulaire spéciale;* les trois involutions quadratiques qui correspondent aux centres d'inversion seront les involutions composantes.

2° *Les trois centres d'inversion d'une involution circulaire spéciale sont les sommets d'un triangle conjugué au cercle qui porte l'involution.*

3° *Dans une involution circulaire spéciale, il existe trois groupes composés chacun de deux points doubles. Réciproquement, quand les six points doubles que possède une involution circulaire du quatrième ordre sont répartis deux à deux en trois groupes, l'involution est du genre de celles que j'appelle* spéciales.

4° *Les droites dirigées d'un point quelconque du cercle aux points doubles de deux des involutions composantes, forment un faisceau harmonique.*

5° *Une involution circulaire spéciale est déterminée sur un cercle par ses trois centres d'inversion* P', P'', P''' *qui doivent être trois points conjugués.*

Les trois points a_2, a_3, a_4 *qui forment un groupe avec un point donné* a_1 *sont les intersections du cercle avec les droites* $P'a_1$, $P''a_1$ *et* $P'''a_1$. *Quand les centres d'inversion et le point choisi* a_1 *sont réels, les quatre points du groupe sont réels, mais si deux centres d'inversion étaient imaginaires, deux des quatre points du groupe seraient également imaginaires.*

35. J'appelle *rayons d'involution conjugués* les deux rayons d'une involution composante qui déterminent les quatre points d'un même groupe.

Deux rayons d'involution conjugués issus du point P' coupent harmoniquement le segment $P''P'''$. D'après cela, *on obtient une involution circulaire spéciale en coupant un cercle par deux faisceaux de droites en involution quadratique, sous la seule condition que les rayons doubles soient conjugués par rapport au cercle.*

On déduit de là que *quand les trois points* P′, P″, P‴ *sont réels, tout groupe est composé de quatre points réels ou de quatre points imaginaires*, ce qui est conforme à la proposition 5° du numéro précédent.

Quand les points P″ *et* P‴ *sont imaginaires, si un rayon issu de* P′ *coupe le cercle, le rayon qui lui est conjugué dans l'involution composante ne le rencontre pas, et réciproquement. Chaque groupe est alors composé de deux points réels et de deux points imaginaires.*

54. *Deux centres d'inversion* P′ *et* P″ *peuvent coïncider en un point* P_2 *du cercle; le troisième point* P‴ *est alors sur la tangente en* P_2. *L'involution spéciale est formée de l'involution composante* P‴, *à chacun des points de laquelle le point* P_2 *est ajouté deux fois.*

Lorsque le point P‴ *se réunit à* P_2, *chaque groupe se compose d'un point du cercle et de trois fois le point* P_2.

Involution spéciale circulaire complète.

55. Soit un cercle C ayant son centre en un point P, et portant une involution spéciale dont les centres d'inversion sont P′, P″, P‴; j'appelle C′, C″, C‴ les cercles qui ont respectivement pour centre ces trois points, et qui coupent orthogonalement C. La droite P″P‴ est la sécante commune de C et de C′; les cercles C″ et C‴ ayant leurs centres sur cette droite, et coupant C à angle droit, sont également orthogonaux à C′.

La droite P″P‴ est la polaire P′ dans le cercle C et de P dans le cercle C′.

Il résulte de ces observations, que chacun des cercles C, C′, C″, C‴ coupe les autres à angle droit, et que les centres de trois d'entre eux sont les sommets d'un triangle conjugué au quatrième.

La droite qui joint les centres de deux cercles est perpendiculaire à celle qui passe par les centres des deux autres.

Les quatre cercles jouissent les uns par rapport aux autres de propriétés symétriques.

56. Si nous considérons l'involution sur C comme produite par des

rayons divergeant du point P′ (nº **55**), nous aurons les points figuratifs des points imaginaires, en prenant l'intersection de C′ avec un faisceau ayant son centre en P, et dont les rayons seront respectivement perpendiculaires aux rayons d'involution divergeant de P′ (nº **50**). On obtient ainsi une involution spéciale sur C′.

Les rayons doubles du faisceau P sont les droites PP″ et PP‴ respectivement perpendiculaires aux rayons doubles P′P‴ et P′P″ du faisceau P′. Comme d'ailleurs P″ et P‴ se trouvent sur la polaire de P′ par rapport au cercle C, nous voyons que ces points sont, avec P, les centres d'inversion de l'involution figurative complémentaire sur le cercle P′.

Si l'on considère l'involution sur C comme obtenue par un faisceau ayant son centre en P″, on aura sur C″ une involution spéciale complémentaire ayant pour centres d'inversion P, P′, P‴.

En résumé, *nous avons sur chaque cercle une involution spéciale dont les centres d'inversion sont les centres des autres cercles. Deux quelconques de ces involutions peuvent être regardées comme complémentaires figuratives.*

J'appellerai *involution spéciale circulaire complète,* l'ensemble de quatre involutions de ce genre sur quatre cercles orthogonaux.

57. Une transformation par rayons vecteurs réciproques ne fait pas perdre ses propriétés au système que je viens de décrire, car des cercles orthogonaux sont changés en cercles orthogonaux.

Si le pôle de transformation est sur un des cercles, on obtient trois cercles qui se coupent à angle droit, et dont les centres sont sur une ligne droite qui remplace le quatrième cercle. C'est le système que j'ai étudié dans le premier paragraphe. Les différents groupes de l'involution sur la droite ne peuvent pas être donnés par les rayons conjugués de l'un quelconque des trois faisceaux. Je les ai déterminés par la position du centre de leurs moyennes distances, ce qui introduit quelques différences.

Quand le pôle de transformation est à l'intersection de deux cercles, on obtient deux droites rectangulaires et deux cercles dont les centres coïncident au point de rencontre de ces lignes. Les carrés des rayons des cercles sont égaux et de signes contraires.

§ III. — Groupes de points réciproques sur un plan.

38. Revenons au cas où l'on a sur une droite une involution spéciale du quatrième ordre avec ses trois cercles d'inversion dont les centres sont O′, O″ et O‴ (nº **24**). Je prends arbitrairement un point M_1, et je détermine d'abord ses réciproques M_2, M_3, M_4 par rapport aux trois cercles, puis les symétriques M'_1, M'_2, M'_3, M'_4 des quatre premiers points par rapport à l'axe O′O″O‴. *Les huit points ainsi obtenus sont réciproques deux à deux par rapport à l'un quelconque des cercles.* Si l'on considère le cercle O′, les couples de points réciproques sont

$$M_1 \text{ et } M_2, \quad M'_1 \text{ et } M'_2, \quad M_3 \text{ et } M'_4, \quad M'_3 \text{ et } M_4.$$

Pour démontrer ce théorème, il suffit de vérifier que les points M_3 et M'_4, sont réciproques par rapport au cercle O′.

Je choisis pour axes la droite O′O″O‴ et sa perpendiculaire en O′. J'appelle λ'' et λ''' les abscisses des points O″ et O‴. Je désigne par x_1 et y_1 les coordonnées du point M_1; celles des points M'_1, M_2, etc., seront x'_1 et y'_1, x_2 et y_2, etc.

On obtient sans difficulté

$$x_3 = \lambda'' \frac{(x_1 - \lambda'')(x_1 - \lambda''') + y_1^2}{(x_1 - \lambda'')^2 + y_1^2}, \quad y_3 = \lambda'' \frac{(\lambda'' - \lambda''')y_1}{(x_1 - \lambda'')^2 + y_1^2},$$

$$x'_4 = \lambda''' \frac{(x_1 - \lambda'')(x_1 - \lambda''') + y_1^2}{(x_1 - \lambda''')^2 + y_1^2}, \quad y'_4 = \lambda''' \frac{(\lambda''' - \lambda'')y_1}{(x_1 - \lambda''')^2 + y_1^2}.$$

Ces expressions donnent immédiatement

$$\frac{x_3}{y_3} = \frac{x'_4}{y'_4}.$$

Nous voyons que les points M_3, M'_4 et O′ sont en ligne droite. Pour que les deux premiers soient réciproques par rapport au cercle O′, il faut de plus qu'on ait

$$\sqrt{x_3^2 + y_3^2}\sqrt{x'^2_4 + y'^2_4} = \lambda''\lambda''',$$

car les points O″ et O‴ sont conjugués par rapport au cercle d'inversion O′ (nº **6**). Or cette équation se réduit à une identité, quand on

y porte les valeurs ci-dessus de x_3, y_3, x'_4 et y'_4. Le théorème énoncé est donc démontré.

Tout cercle mené par le point M_1 et normal au cercle O′ passe par M_2. Réciproquement, tout cercle passant par M_1 et M_2 est normal au cercle O′.

Lorsque le point primitif M_1 est sur la droite O′O″O‴ ou sur un des trois cercles, les points se confondent deux à deux, et on obtient un groupe de quatre points du genre de ceux qui ont été étudiés dans le premièr paragraphe.

39. Quand on a deux courbes réciproques par rapport à un cercle, si l'on transforme tout le système, on obtient deux nouvelles courbes réciproques par rapport au cercle transformé. Il suit de là que le théorème du n° **38** peut être étendu au cas d'une involution spéciale circulaire complète, et qu'on peut sur le plan d'une involution de ce genre déterminer des groupes de huit points réciproques deux à deux par rapport aux quatre cercles.

SECONDE PARTIE.

QUELQUES THÉORÈMES GÉNÉRAUX SUR LES ANALLAGMATIQUES.

Définition et génération des anallagmatiques.

40. Adoptant une expresssion introduite par M. Moutard, je dirai qu'une courbe plane est *anallagmatique* quand elle est sa propre transformée par rapport à un certain *cercle d'inversion.*

Toute anallagmatique est l'enveloppe d'un cercle orthogonal à un cercle fixe (qui est précisément le cercle d'inversion), dont le rayon est variable et dont le centre parcourt une courbe donnée. J'appellerai cette ligne *courbe déférente* eu égard à l'analogie qu'elle présente avec les cercles déférents de l'ancienne astronomie.

Soient IT une tangente de la courbe déférente, et I son point de contact : la perpendiculaire OK abaissée du centre O du cercle d'inversion sur la droite IT passe par les deux points x et x' où le cercle enveloppé qui a son centre en I touche l'anallagmatique.

Les points réciproques x et x' sont conjugués harmoniques de ceux où la droite OK rencontre le cercle d'inversion, et le segment xx' a son

milieu K sur la tangente IT. Les points x et x' sont par suite indépendants de la position du point de contact I sur la tangente IT; ils sont imaginaires ou réels suivant que la tangente IT coupe le cercle d'inversion ou ne le rencontre pas.

Une sécante menée par le point O coupe l'anallagmatique en des couples de points réciproques. Les perpendiculaires élevées à la sécante par les milieux des segments compris entre les points d'un même couple, sont tangentes à la déférente.

Cercles enveloppés dans une anallagmatique considérés comme formant un système de coniques.

41. Les cercles qui ont pour enveloppe une anallagmatique forment un système de coniques dont il nous sera utile d'avoir les caractéristiques μ et ν.

J'appelle n et m l'ordre et la classe de la courbe déférente.

Les cercles du système qui passent par un point M_1 du plan se croisent aussi au point réciproque M_2; les centres de ces cercles sont les n intersections de la déférente avec la perpendiculaire élevée à la droite $M_1 M_2$ par son milieu. On voit ainsi que la caractéristique μ est égale à n; en d'autres termes, *le nombre des cercles du système qui passent par un point du plan est égal à l'ordre de la déférente.*

42. Les coniques exceptionnelles sont ici les cercles dont le rayon est nul ou infini.

Les $2n$ intersections de la déférente avec le cercle d'inversion donnent les cercles qui ont un rayon nul. Chacun d'eux doit être considéré comme l'intersection de deux droites dirigées vers les points circulaires à l'infini.

La déférente possède n points à l'infini. A chacun d'eux correspond un cercle d'un rayon infini, c'est-à-dire l'ensemble de deux droites dont une est à l'infini.

Le système comprend donc $3n$ coniques décomposées en deux droites, et ne contient aucune conique infiniment aplatie. Nous avons en conséquence d'après les formules de M. Chasles

$$2\mu - \nu = 0, \quad 2\nu - \mu = 3n.$$

μ étant égal à n (n° 41), ces relations donnent toutes les deux pour ν la valeur $2n$. *Le nombre des cercles du système qui touchent une droite quelconque est donc égal au double de l'ordre de la déférente.*

D'après un théorème de M. Chasles, l'ordre de la courbe lieu des centres des coniques d'un système est égal à la caractérisque ν; mais il faut remarquer qu'ici nous avons n coniques composées de deux droites dont une à l'infini, et que dans chacune d'elles, tout point à l'infini peut être considéré comme le pôle de la droite de l'infini, c'est-à-dire comme un centre. Le lieu des centres comprend ainsi, outre la déférente, n fois la ligne de l'infini, et par suite l'ordre de ce lieu est $2n$ ou ν.

43. Chaque cercle d'un rayon infini est une droite passant par le centre du cercle d'inversion et perpendiculaire à une asymptote de la déférente; comme d'ailleurs tous les cercles du système touchent l'enveloppe en deux points, on voit que *n tangentes doubles de l'anallagmatique se croisent au centre du cercle d'inversion, et sont respectivement perpendiculaires aux asymptotes de la déférente.*

J'examinerai plus loin le cas où cette courbe a des branches paraboliques.

Ordre de l'anallagmatique.

44. Une droite menée par le centre O du cercle d'inversion rencontre l'anallagmatique en autant de couples de points que la déférente a de tangentes qui lui sont perpendiculaires (n° **40**). *L'ordre de l'anallagmatique est donc double de la classe de la courbe déférente.*

On arrive au même résultat en considérant une droite quelconque D du plan de l'anallagmatique. Par un point x de D je fais passer un cercle du système : la droite qui contient les deux points où ce cercle touche l'anallagmatique coupe D en un point u. A un point x correspondent n points u (n° **41**).

Je joins au centre O du cercle d'inversion un point u pris arbitrairement sur D; la courbe déférente a m tangentes perpendiculaires à Ou : soit I le point de contact de l'une d'elles; le cercle enveloppé qui a son centre en I coupe D en deux points x. A un point u correspondent $2m$ points x.

Les coïncidences sont au nombre de $(n + 2m)$; il y en a une sur

chacune des n tangentes doubles qui passent par le point O. Les $2m$ autres déterminent les points de l'anallagmatique sur la droite D.

45. Quand la courbe déférente a une branche parabolique, deux cercles consécutifs se décomposent chacun en deux droites, une passant par le centre du cercle d'inversion, et l'autre à l'infini. Il résulte de là que l'anallagmatique passe par le centre du cercle d'inversion et que la droite de l'infini fait partie de l'enveloppe dont l'ordre a été déterminé au numéro précédent.

Chaque branche parabolique de la déférente abaisse d'une unité l'ordre de l'anallagmatique, et détermine dans cette courbe une branche passant par le centre du cercle d'inversion.

Si la déférente avait une branche parabolique avec inflexion à l'infini, l'ordre de l'anallagmatique serait abaissé de deux unités, et cette courbe aurait au centre du cercle d'inversion un point double formé par la superposition de deux points consécutifs, c'est-à-dire un point de rebroussement.

46. D'après ce qui précède, quand la déférente est une conique, l'anallagmatique est, en général, du quatrième ordre, mais elle s'abaisserait au troisième ordre si la déférente était une parabole.

Il y a une seconde anallagmatique du quatrième ordre ; elle a pour déférente une courbe de la troisième classe, ayant une branche parabolique avec inflexion à l'infini.

Foyers de l'anallagmatique.

47. Adoptant la définition de Plücker, j'appelle *foyers* d'une courbe les intersections mutuelles des tangentes qui lui sont menées des points circulaires à l'infini, ou, ce qui revient au même, les centres des cercles de rayon nul qui ont un double contact avec la courbe. *Les $2n$ intersections de la déférente avec le cercle d'inversion sont donc des foyers de l'anallagmatique* (n° **42**).

En prenant les intersections mutuelles des droites qui passent par les foyers situés sur le cercle d'inversion et par les points circulaires à l'infini, on obtient de nouveaux foyers. *Ceux-ci sont deux à deux réciproques par rapport au cercle d'inversion.*

Pour établir ce théorème, je remarque qu'en choisissant convenablement les axes, on peut représenter par a et $\pm\sqrt{R^2 - a^2}$ les coordonnées x et y de deux foyers situés sur le cercle d'inversion, mais d'ailleurs quelconques. Les quatre droites dirigées de ces foyers aux points circulaires sont représentées par l'équation

$$y \pm (x - a)\sqrt{-1} \pm \sqrt{R^2 - a^2} = 0.$$

Les rencontres des couples de droites non parallèles ont une ordonnée nulle et des abscisses x' et x'' dont les valeurs sont

$$x' = a - \sqrt{a^2 - R^2}, \quad x'' = a + \sqrt{a^2 - R^2};$$

d'où

$$x'x'' = R^2.$$

Ce qui démontre le théorème énoncé.

Je donnerai au numéro suivant une nouvelle proposition sur les foyers des anallagmatiques.

Points multiples des anallagmatiques.

18. Supposons que l'on ait un système de cercles passant tous par un même point E; de ce point je mène une tangente au lieu des centres des cercles : les deux points communs au lieu et à la tangente sont les centres de deux cercles consécutifs qui se touchent en E. Chacune des tangentes menées par le point E au lieu des centres est donc normale en ce point à une branche de l'enveloppe des cercles.

Revenons maintenant à l'anallagmatique, et appliquons les considérations qui précèdent aux points circulaires à l'infini : en remarquant que les droites dirigées vers ces points sont perpendiculaires à elles-mêmes, on voit que *les points circulaires à l'infini appartiennent à l'anallagmatique, et y ont un ordre de multiplicité égal à la classe de la déférente. Les tangentes des différentes branches en un de ces points coïncident avec les tangentes menées de ce point à la déférente, et par suite les foyers de cette dernière courbe sont des foyers quadruples de la première* [*].

[*] M. Laguerre a donné ce théorème dans le cas où la courbe déférente est une conique.

Quand la déférente a des branches paraboliques, des droites à l'infini se détachent, et l'ordre de multiplicité des points circulaires est diminué d'un nombre égal d'unités.

Si la courbe déférente passe par les points circulaires à l'infini, deux des tangentes qui lui sont menées de chacun d'eux coïncident; l'anallagmatique a par conséquent, en ces points, des points doubles formés par la superposition de deux points consécutifs, c'est-à-dire des points de rebroussement.

M. Laguerre appelle *foyers singuliers* d'une courbe passant aux points circulaires à l'infini, les intersections mutuelles des tangentes de la courbe en ces points. J'adopterai cette expression.

49. D'après ce que nous avons vu au n° **39**, le cercle d'inversion étant donné, on peut déterminer deux points de l'anallagmatique lorsqu'on connaît une tangente de la déférente. Il résulte de là qu'*à chaque tangente double de la déférente correspondent sur l'anallagmatique deux points doubles réciproques l'un de l'autre.* Ces points sont imaginaires ou réels suivant que la tangente coupe le cercle ou ne le rencontre pas. Quand la tangente double est idéale les points sont isolés.

Si une tangente double de la déférente touche le cercle d'inversion, deux branches de l'anallagmatique passent par le point de contact, l'une et l'autre normales au cercle.

50. Supposons qu'une droite touche le cercle d'inversion et la déférente en des points B et C : le cercle enveloppé dont le centre est C a un contact du troisième ordre avec l'anallagmatique parce que ses deux points de tangence sont réunis en B. Le point B est donc un *sommet* sur l'anallagmatique. La normale de cette courbe est la tangente BC de la déférente.

51. Quand la déférente touche le cercle d'inversion en un point G, deux tangentes communes sont confondues en une seule, et le rayon du cercle enveloppé a une longueur nulle; l'anallagmatique possède par conséquent un point double en G. Ce point serait isolé, si, près de lui, la déférente était dans l'intérieur du cercle d'inversion, ou si

les courbures de la déférente et du cercle étaient de sens contraires. Quand il y a osculation entre ces lignes, l'anallagmatique possède un point de rebroussement.

52. Lorsque la déférente est une ellipse ou une hyperbole touchant le cercle d'inversion en deux points, l'anallagmatique est une courbe du quatrième ordre ayant des points doubles aux deux points de contact et aux points circulaires à l'infini, c'est-à-dire l'ensemble de deux cercles.

On obtient encore deux cercles en prenant pour déférente une conique décomposée en deux points. Les cercles ont respectivement leurs centres en ces points, et coupent orthogonalement le cercle d'inversion.

En général, quand la déférente est un être géométrique formé d'une courbe double Σ divisée par des points (*voir* les communications faites par M. Chasles à l'Académie des Sciences les 22 avril et 27 mai 1867), l'anallagmatique comprend les cercles qui ont pour centres les points de division et qui sont orthogonaux aux cercles d'inversion, et, en outre, la ligne qui correspond à la courbe Σ.

Si la déférente était une parabole ayant avec le cercle d'inversion un double contact réel ou idéal, l'anallagmatique serait une ligne du troisième ordre ayant deux points doubles réels ou imaginaires, et passant par les points circulaires à l'infini, c'est-à-dire le système d'un cercle et d'une droite.

53. On a quelquefois à considérer des anallagmatiques pour lesquelles le cercle d'inversion a un rayon nul. Une courbe de ce genre est l'enveloppe de cercles qui passent par un point fixe. En conséquence, et par les considérations présentées au commencement du n° **48**, on reconnaît que le centre d'inversion est sur l'anallagmatique, et qu'il y a un ordre de multiplicité égal à la classe de la déférente. Les tangentes des différentes branches de l'anallagmatique, au centre d'inversion, sont respectivement perpendiculaires aux tangentes menées de ce point à la déférente.

Dans ce cas, si le centre d'inversion est sur la déférente, l'anallagmatique a un rebroussement.

Le rayon du cercle d'inversion étant nul, on obtient les points de l'anallagmatique en abaissant du centre d'inversion des perpendiculaires sur les tangentes de la déférente, et prolongeant chacune d'elles d'une longueur égale à elle-même (nº 40). L'anallagmatique est alors la podaire d'une courbe homothétique à la déférente et de dimensions doubles. Le centre d'inversion est le pôle de similitude des deux courbes.

L'étude que nous venons de faire des points multiples des anallagmatiques, bien qu'incomplète, nous suffira pour la discussion des spiriques.

Transformation d'une anallagmatique.

54. Dans la transformation par rayons vecteurs réciproques, les cercles orthogonaux sont remplacés par d'autres cercles orthogonaux; il en résulte que la transformée d'une anallagmatique est une anallagmatique; les deux cercles d'inversion sont réciproques.

Les deux systèmes de cercles enveloppés ont les mêmes caractéristiques.

55. Les déférentes sont des courbes de même ordre (nº 41). Elles se correspondent point à point. Deux points homologues sont les centres de deux cercles enveloppés réciproques, et se trouvent par conséquent sur une droite passant par le pôle Ω de la transformation.

Il y a trois cercles d'inversion à considérer : ceux qui sont propres aux anallagmatiques, et celui par rapport auquel les deux anallagmatiques sont réciproques. Ces trois cercles se coupent en deux mêmes points e et f. Tout cercle ayant son centre sur la droite ef, et rencontrant à angle droit un des premiers, sera orthogonal aux deux autres. Il résulte de là que les deux déférentes coupent aux mêmes points l'axe radical des trois cercles. Nous voyons que les deux déférentes sont homologiques; le centre et l'axe d'homologie sont le pôle Ω de la transformation et la sécante commune des cercles d'inversion.

Si le pôle général de la transformation est sur le cercle d'inversion de la première figure, le cercle d'inversion de la seconde devient un axe de symétrie, et la déférente se réduit à un être géométrique composé

de plusieurs fois cet axe et de points placés sur lui. Le cercle d'inversion et la déférente étant confondus sur une droite ne suffisent plus pour déterminer l'anallagmatique, car tout cercle dont le centre est sur la droite pourrait être considéré comme appartenant au système des cercles enveloppés. Dans ce cas on ne doit pas chercher à appliquer les théorèmes que j'ai exposés plus haut.

Indications sur les différents genres d'anallagmatiques.

56. Toute courbe ayant un axe de symétrie est une anallagmatique dont le centre d'inversion se trouve à l'infini. On obtient, en la transformant, une anallagmatique ordinaire.

Certaines courbes ont deux, quatre, huit, etc., axes de symétrie qui se croisent en un point; leurs transformées sont anallagmatiques par rapport à deux, quatre, huit, etc., cercles passant par deux mêmes points et comprenant entre eux des angles égaux.

La sinusoïde et diverses autres courbes transcendantes ont une infinité d'axes de symétrie parallèles entre eux; leurs transformées sont anallagmatiques par rapport à une infinité de cercles tangents à une droite en un même point.

Revenons aux lignes algébriques, et supposons qu'on ait une déférente symétrique par rapport à deux diamètres rectangulaires du cercle d'inversion; la courbe obtenue est anallagmatique, non-seulement par rapport à ce cercle, mais encore par rapport au cercle imaginaire qui a le même centre que lui, et qui lui est orthogonal. Elle a de plus deux axes de symétrie qui se croisent à angle droit au centre commun des cercles. Ses transformées sont par conséquent anallagmatiques par rapport à quatre cercles orthogonaux. Leurs points forment des groupes analogues à ceux dont je me suis occupé au n° **39**.

On peut prendre pour déférente une courbe symétrique par rapport à quatre, huit, seize, etc. diamètres du cercle d'inversion, et ensuite, par une transformation, on aura des courbes anallagmatiques par rapport à quatre, huit, seize, etc., cercles passant par deux points fixes et comprenant entre eux des angles égaux, et par rapport à deux cer-

cles, l'un réel, l'autre imaginaire, orthogonaux entre eux et aux premiers.

A chaque cercle d'inversion d'une anallagmatique correspond une déférente. Toutes les déférentes ont pour foyers les foyers singuliers de l'anallagmatique (nº 48).

CHAPITRE PREMIER.

PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DE LA SPIRIQUE.

Considérations générales.

57. Lorsqu'une surface est coupée par un plan, la courbe d'intersection appartient à la surface symétrique de la première par rapport au plan. Il résulte de là que le nombre des surfaces d'une même définition qui passent par une courbe plane, est pair quand il n'est pas infini. On conçoit, en conséquence, que pour certaines valeurs des paramètres de la courbe, les surfaces considérées puissent devenir toutes imaginaires. Il semble, d'après cela, qu'il n'est pas sans quelque inconvénient de définir une courbe plane par la propriété d'appartenir à des surfaces déterminées, si leur nombre est limité, et qu'on doit préférer prendre pour définition une propriété caractéristique de la courbe sur le plan.

Par ces considérations, j'ai cru devoir abandonner l'ancienne définition de la spirique. Nous verrons que les tores qui passent par une spirique réelle sont souvent tous imaginaires.

58. *La spirique est une courbe plane du quatrième ordre qui possède un axe de symétrie et deux points doubles situés à l'infini sur un cercle.*

En remarquant qu'un tore contient un cercle à l'infini sur une sphère, et que sa section par un plan a un axe de symétrie, on reconnaît que cette section est une spirique.

J'établirai plus loin que toute spirique appartient à un nombre déterminé de tores.

La spirique possède sur son axe de symétrie quatre sommets que je désignerai par a_1, a_2, a_3, a_4.

J'appellerai *plan principal* de la spirique le plan qui est perpendiculaire à celui de cette courbe et qui contient son axe de symétrie.

59. On trouve, par les formules de Plücker, que *la spirique est, en général, une courbe de la huitième classe ayant huit tangentes doubles.*

Puisqu'elle est de la huitième classe, on peut lui mener huit tangentes perpendiculaires à son axe : quatre d'entre elles la touchent à ses sommets; les quatres autres se confondent deux à deux.

Deux des tangentes doubles de la spirique sont perpendiculaires à son axe; les six autres occupent deux à deux des positions symétriques.

60. Quand on fait tourner une spirique autour d'une droite située d'une manière quelconque dans l'espace, la surface engendrée est du huitième ordre, car sa section par le plan de la spirique se compose d'abord de cette courbe, puis d'une spirique égale et placée symétriquement par rapport à la projection de l'axe de révolution. Si cependant cet axe est dans le plan principal de la spirique, les points de la courbe décrivent deux à deux les mêmes parallèles, et on obtient deux fois une surface du quatrième ordre.

Dans le mouvement de révolution, les points circulaires qui sont a l'infini sur le plan de la spirique engendrent chacun deux fois le cercle d'intersection du plan de l'infini avec une sphère. Il suit de là que ce cercle est double sur la surface du quatrième ordre, et que la section plane de cette surface possède deux points doubles aux points circulaires; elle est d'ailleurs symétrique par rapport à un axe, c'est donc une spirique.

Si l'on fait tourner une spirique autour d'une droite située dans son plan principal et d'ailleurs quelconque, la surface engendrée sera telle, que toutes ses sections planes seront des spiriques.

61. La méridienne de cette surface est une spirique comme ses autres sections planes; elle admet donc six tangentes doubles non perpendiculaires à l'axe de révolution (n° 59). Tout plan passant par

une de ces droites et perpendiculaire au plan méridien touche la surface en deux points et, par suite, la coupe suivant une spirique qui a deux nouveaux points doubles sur son axe de symétrie. Comme d'ailleurs une ligne du quatrième ordre ne peut pas avoir plus de trois points doubles, cette spirique se décompose en deux coniques qui se croisent aux points circulaires à l'infini, c'est-à-dire en deux cercles.

Les six tangentes doubles obliques à l'axe ont deux à deux des positions symétriques. Elles engendrent par leur révolution trois cônes qui ont le même axe que la surface et qui lui sont doublement circonscrits. Tout plan tangent à l'un d'eux coupe la surface suivant deux cercles égaux [*]. J'appellerai cette surface *tore oblique* dans le cas général, *tore droit* et *tore ordinaire* quand les plans des cercles de l'un des systèmes seront parallèles à l'axe de révolution, et quand ils contiendront cet axe.

Les centres des cercles donnés par les sections planes des trois systèmes sont dans un même plan que je désignerai sous le nom de *plan équatorial*. L'intersection de ce plan avec l'axe de révolution sera le *point central* de la surface. Dans le tore droit et le tore ordinaire, le point central est un véritable centre.

D'après ce qui précède, nous pouvons modifier l'énoncé du théorème obtenu au n° **60**, et dire que *la surface engendrée par la révolution d'une spirique autour d'une droite située dans son plan principal est un tore généralement oblique.*

Le tore oblique a un parallèle double à l'infini sur une sphère, et, par suite, en raisonnant comme au n° **58**, on trouve que *toute section plane d'un tore oblique est une spirique.*

62. Lorsqu'on fait tourner une spirique autour d'une droite située dans son plan principal, les deux tangentes doubles perpendiculaires à l'axe de symétrie (n° **59**) décrivent des plans qui touchent le tore

---

[*] Divers théorèmes ont été obtenus sur cette surface par M. J.-A. Serret et par moi. *Voir* le Mémoire de M. Mannheim *Sur la cyclide* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1860), et mon *Mémoire sur le tore général* ou surface engendrée par la révolution d'une conique autour d'une droite située d'une manière quelconque dans l'espace (*Journal de l'École Polytechnique*, XLe Cahier).

oblique engendré, chacun le long d'un parallèle. Le plan équatorial du tore oblique est parallèle à ces plans, et situé à des distances égales de l'un et de l'autre. Son intersection avec le plan de la spirique est donc la droite qui forme le diamètre du système des deux tangentes doubles perpendiculaires à l'axe de symétrie. J'appellerai cette droite l'*équatoriale* de la spirique, et le point où elle rencontre l'axe de symétrie le *point équatorial* de la courbe. Je désignerai toujours le point équatorial par la lettre E.

Les plans équatoriaux de tous les tores obliques qui passent par une même spirique se coupent suivant l'équatoriale de cette courbe.

63. L'ovale de Descartes satisfait à la définition de la spirique, avec cette circonstance, qu'il possède des rebroussements aux points doubles à l'infini, ainsi que M. Cayley l'a démontré [*]. J'appellerai cette ligne *cartésienne*, et je réserverai le mot *ovale* pour désigner toute branche fermée d'une courbe. Le nom d'*ovale de Descartes* a l'inconvénient de rappeler, pour les rayons vecteurs issus des foyers, des propriétés qui disparaissent quand deux des foyers sur l'axe sont imaginaires.

En tournant autour d'une droite située dans son plan principal, la cartésienne engendre une surface qui a un parallèle de rebroussement à l'infini sur une sphère, et dont, par suite, les sections planes ont deux rebroussements à l'infini sur un cercle : ce sont des cartésiennes. Quand le plan tangent est perpendiculaire à l'axe de révolution, on a deux cercles concentriques.

La cartésienne est une courbe de la sixième classe; elle possède une seule tangente double qui est perpendiculaire à son axe. Quand, par suite de modifications apportées à ses paramètres, une spirique se transforme en cartésienne, la seconde tangente double perpendiculaire à l'axe et l'équatoriale sont transportées à l'infini; les six autres tangentes doubles sont remplacées par les tangentes menées à la courbe de ses points de rebroussement.

---

[*] *Journal de Mathématiques*, 1850, p. 355.

Formules fondamentales.

64. Il résulte de la définition même de la spirique que si on la rapporte à deux axes rectangulaires dont un, celui des abscisses, coïncide avec son axe de symétrie, on pourra la représenter par l'équation

$$(1) \qquad (x^2+y^2)^2 - 4px(x^2+y^2) + qx^2 + ry^2 + sx + t = 0.$$

L'origine n'a pas de position déterminée sur l'axe de symétrie; nous pouvons la placer de manière à faire disparaître de l'équation de la courbe les termes du troisième degré. Il suit de là que *la spirique possède sur son axe de symétrie un point qui est le centre des moyennes distances des quatre points où une quelconque des droites qui y passent rencontre la courbe.*

Je désignerai ce point par la lettre G.

La courbe étant représentée par l'équation (1), l'abscisse du point G est p.

65. En mettant l'équation (1) sous la forme

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\left(x^2+y^2-2px+\frac{r}{2}\right)^2 \\ &\quad + (q-r-4p^2)x^2 + (s+2pr)x + \left(t-\frac{r^2}{4}\right) = 0, \end{aligned} \right.$$

on reconnaît que chacune des deux droites données par l'équation

$$(3) \qquad (q-r-4p^2)x^2 + (s+2pr)x + \left(t-\frac{r^2}{4}\right) = 0$$

touche la spirique aux deux points où elle rencontre le cercle

$$(4) \qquad x^2+y^2-2px+\frac{r}{2} = 0.$$

Ce sont les tangentes doubles perpendiculaires à l'axe (n° **59**).

Si nous désignons l'abscisse de l'équatoriale par e, nous aurons, d'après la définition même de cette droite (n° **62**), et en vertu de l'é-

quation (3),

(5) $$e = -\frac{s + 2pr}{2(q - r - 4p^2)}.$$

Lorsque les coefficients satisfont à la relation

(6) $$q - r - 4p^2 = 0,$$

l'équatoriale et l'une des tangentes doubles perpendiculaires à l'axe s'éloignent à l'infini; l'équation prend d'ailleurs l'une des formes connues de l'équation de la cartésienne.

66. Les deux tangentes doubles perpendiculaires à l'axe peuvent coïncider. L'équation (3) est alors un carré parfait, et on voit par l'équation (2) que la spirique se décompose en deux cercles dont les centres sont sur l'axe de symétrie. La sécante commune des deux cercles représente les deux tangentes doubles perpendiculaires à l'axe et l'équatoriale.

Indications sur les tores obliques qui passent par une spirique.

67. Considérons un tore oblique : je place l'origine des coordonnées au point central (n° **61**), et je prends, pour axes des X, des Y et des Z, deux droites rectangulaires situées dans le plan équatorial et l'axe de révolution.

J'appelle b le rayon de l'un des cercles par lesquels la surface peut être engendrée;

g la longueur de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur celui des diamètres du cercle générateur qui est situé dans le plan équatorial;

a le segment compris sur ce diamètre entre le pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine, et le centre du cercle;

γ l'angle que le plan du cercle fait avec le plan équatorial.

L'équation du tore oblique est [*]

(7) $$(X^2 + Y^2 + Z^2 - 2g\cot\gamma . Z - a^2 - b^2 - g^2)^2 + \frac{4a^2}{\sin^2\gamma}(Z^2 - b^2\sin^2\gamma) = 0.$$

---

[*] Cette équation est facile à obtenir. On peut la déduire de celle que j'ai donnée pour le tore général, au n° 14 de mon Mémoire sur cette surface.

68. Je coupe le tore oblique par un plan, et je rapporte la section à deux axes rectangulaires dont un, celui des abscisses, est la droite du plan sécant contenue dans le plan méridien qui lui est perpendiculaire.

J'appelle x et y les coordonnées d'un point de la section;

e l'abscisse du point E où le plan équatorial du tore coupe l'axe des abscisses;

ρ la distance du point central C du tore au point E;

ω l'angle que le plan équatorial du tore fait avec le plan sécant.

Pour avoir l'équation de la section, il suffit de remplacer dans l'équation (7) X, Y et Z par les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} X &= x\cos\omega - (e\cos\omega + \rho), \\ Y &= y, \\ Z &= -x\sin\omega + e\sin\omega. \end{aligned}$$

On trouve

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} &[x^2 + y^2 - 2(e + \rho\cos\omega - g\sin\omega\cot\gamma)x \\ &\quad + e^2 + 2e\rho\cos\omega - 2ge\sin\omega\cot\gamma + \rho^2 - a^2 - b^2 - g^2]^2 \\ &\quad + 4\frac{a^2\sin^2\omega}{\sin^2\gamma}x^2 - 8ea^2\frac{\sin^2\omega}{\sin^2\gamma}x + 4\frac{a^2}{\sin^2\gamma}(e^2\sin^2\omega - b^2\sin^2\gamma) = 0. \end{aligned} \right.$$

69. Égalant entre eux les coefficients des équations (2) et (8), j'ai

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} &p = e + \rho\cos\omega - g\sin\omega\cot\gamma, \\ &\frac{1}{2}r = e^2 + 2e\rho\cos\omega - 2ge\sin\omega\cot\gamma + \rho^2 - a^2 - b^2 - g^2, \\ &q - r - 4p^2 = 4a^2\frac{\sin^2\omega}{\sin^2\gamma}, \\ &s + 2pr = -8ea^2\frac{\sin^2\omega}{\sin^2\gamma}, \\ &t - \frac{r^2}{4} = 4\frac{a^2}{\sin^2\gamma}(e^2\sin^2\omega - b^2\sin^2\gamma). \end{aligned} \right.$$

Les troisième et quatrième de ces équations donnent pour e la valeur déjà obtenue au n° **65**, ce qui fournit une vérification du théorème du n° **62**.

70. En vertu de la relation (5), les équations (9) se réduisent à quatre distinctes. Elles déterminent quatre des six quantités a^2, b^2, g, ρ, ω, γ quand les deux autres sont connues. On peut, par exemple, se donner les deux coordonnées ρ et ω du point central C du tore : l'axe de révolution est alors la perpendiculaire à la droite CE menée par le point C.

Tout point du plan principal d'une spirique est le point central d'un tore oblique passant par cette courbe.

Le point équatorial est le point central d'une infinité de tores obliques qui contiennent la spirique. On détermine les paramètres de ces tores en faisant ρ nul dans les équations (9), et en attribuant diverses valeurs à ω.

71. Si l'on ajoute aux équations (9) une relation arbitraire entre a, b, g, γ, puis qu'on élimine ces quatre quantités et, en outre, e, on aura une équation en ρ et ω qui fera connaître le lieu des points centraux des tores obliques passant par la spirique donnée et satisfaisant à la condition exprimée par la relation arbitraire. Bien que ces recherches présentent quelque intérêt, je me borne à les indiquer.

Indications sur les tores droits qui passent par une spirique.

72. Pour déterminer la position et les paramètres des tores droits qui passent par une spirique donnée, on peut recourir aux équations (9), en y supposant γ égal à 90 degrés. On a alors

$$(10)\qquad \begin{cases} p = e + \rho\cos\omega, \\ \frac{1}{2}r = e^2 + 2e\rho\cos\omega + \rho^2 - a^2 - b^2 - g^2, \\ q - r - 4p^2 = 4a^2\sin^2\omega, \\ t - \dfrac{r^2}{4} = 4a^2(e^2\sin^2\omega - b^2). \end{cases}$$

Je n'ai pas reproduit la quatrième équation parce que, en vertu de la relation (5), elle n'a aucune importance, ainsi que j'en ai déjà fait la remarque (n° **70**).

73. La première des équations (10) montre que les centres des tores sont sur une perpendiculaire au plan de la spirique, coupant son axe au point dont l'abscisse est p, c'est-à-dire au centre G (nº **64**).

Le lieu des centres des tores droits qui passent par une spirique donnée est une perpendiculaire au plan de cette courbe élevée par le centre G des moyennes distances.

74. L'axe du tore droit qui a son centre en un point C de cette perpendiculaire coupe à angle droit le rayon vecteur EC (nº **70**). Il suit de là que *les axes des tores droits qui passent par une spirique donnée enveloppent une parabole située dans le plan principal de cette courbe, et dont le foyer et le sommet coïncident, l'un avec le point équatorial, et l'autre avec le centre* G *des moyennes distances.*

Études des tores ordinaires qui passent par une spirique donnée.

75. Pour accommoder les formules (10) au cas où l'on ne considère que des tores ordinaires, il suffit d'y faire g nul; mais j'y annulerai aussi l'abscisse p de manière à placer au centre G des moyennes distances, l'origine qui jusqu'à présent est restée indéterminée sur l'axe de symétrie.

Les équations (10) deviennent

$$(11)\qquad \begin{cases} e + \rho\cos\omega = 0, \\ e^2 + 2e\rho\cos\omega + \rho^2 - a^2 - b^2 = \frac{1}{2} r, \\ 4a^2\sin^2\omega = q - r, \\ a^2(e^2\sin^2\omega - b^2) = \frac{4t - r^2}{16}. \end{cases}$$

Les paramètres b et a sont le rayon du cercle méridien et la distance de son centre à l'axe du tore.

L'équation (5) est remplacée par la suivante

$$(12)\qquad e = -\frac{s}{2(q - r)}.$$

La spirique étant donnée par ses coefficients q, r, s, t, les équations ci-dessus font connaître les paramètres a et b du tore, et les trois quantités e, ρ, ω qui fixent sa position par rapport à la courbe. Toute spirique appartient donc à un nombre déterminé de tores.

76. Si entre les équations (11) et (12), on élimine l'abscisse e et trois quelconques des quantités a, b, ρ, ω, on obtient pour déterminer la quatrième une équation du sixième degré. On trouve de cette manière que la tangente de l'azimut ω est donnée par l'équation

$$(13)\qquad \begin{cases} s^2 \operatorname{tang}^6\omega + (4t - q^2)(q - r)\operatorname{tang}^4\omega \\ \quad - 2q(q - r)^2 \operatorname{tang}^2\omega - (q - r)^3 = 0; \end{cases}$$

$\operatorname{tang}\omega$ a six valeurs qui sont deux à deux égales et de signes contraires. A chaque couple correspond un système de valeurs pour a^2, b^2 et ρ^2.

Toute spirique appartient à six tores qui sont deux à deux égaux et placés symétriquement par rapport à son plan.

77. Je considère un de ces tores : je désigne par O le point où son axe rencontre l'axe de symétrie de la spirique, et par λ l'abscisse GO. L'angle ECO est droit, et le point C est sur la perpendiculaire élevée à EO par le point G (n° **75**). Nous avons en conséquence

$$(14)\qquad \operatorname{tang}^2\omega = -\frac{\lambda}{e}.$$

La substitution de cette valeur dans l'équation (13) donne, pour déterminer les abscisses des points où les axes de révolution des six tores rencontrent deux à deux l'axe de symétrie de la spirique, l'équation suivante, qui est précisément l'équation (3) de l'Introduction,

$$(15)\qquad \lambda^3 + \frac{4t - q^2}{2s}\lambda^2 - \frac{q}{2}\lambda - \frac{s}{8} = 0.$$

Les axes des six tores qui passent par une spirique rencontrent l'axe de cette courbe en trois points, qui sont les centres d'inversion du groupe des quatre sommets a_1, a_2, a_3, a_4.

78. On peut obtenir ce résultat par des considérations géométriques très-simples.

Le plan principal de la spirique contient deux cercles méridiens de l'un quelconque des tores. Ces cercles coupent l'axe de symétrie aux sommets a_1, a_2, a_3, a_4; l'axe de révolution du tore est leur sécante commune, et, par conséquent, son intersection O avec l'axe de symétrie est le point central de l'une des involutions quadratiques déterminées par les quatre sommets. Mais on peut combiner deux à deux les points a_1, a_2, a_3, a_4 de trois manières différentes, et d'un autre côté les axes des six tores rencontrent l'axe de la spirique en trois points généralement distincts : ces points sont donc les centres d'inversion des quatre sommets.

79. En portant dans l'équation (1) la valeur du coefficient r déduite de la relation (12), on met l'équation de la spirique sous la forme

$$(16)\qquad (x^2+y^2)^2+qx^2+\left(q+\frac{s}{2c}\right)y^2+sx+t=0.$$

On voit qu'*une spirique est déterminée par ses quatre sommets sur l'axe et par son point équatorial.*

Il est facile de construire les tores quand ces cinq points sont connus. On cherche d'abord les centres d'inversion O′, O″, O‴ des quatre sommets. et le centre G des moyennes distances de ces mêmes points; puis on élève une perpendiculaire au plan de la courbe par le point G. Pour avoir les deux tores dont les axes se croisent en O′, on décrit un cercle sur EO′ comme diamètre, et on joint au point O′ les points C et C_1 où ce cercle rencontre la perpendiculaire élevée par le point G. Les droites O′C, O′C_1 et EC, EC_1 sont : les premières, les axes des tores, les autres les traces de leurs plans équatoriaux sur le plan principal de la spirique. Les deux points de la ligne EC qui se trouvent à égales distances, l'un de a_1 et a_2, l'autre de a_3 et a_4 sont, pour l'un des deux tores, les centres des cercles méridiens qui passent respectivement par ces sommets.

Génération de la spirique comme anallagmatique.

80. J'appelle *sphères inscrites* dans un tore, les sphères qui touchent cette surface le long des méridiens. Une spirique est l'enveloppe des cercles suivant lesquels son plan coupe les sphères inscrites dans l'un quelconque des tores auxquels elle appartient.

Les différents points de l'axe du tore sont les centres de sphères qui coupent orthogonalement le tore et les sphères inscrites. Le plan de la spirique rencontre à angle droit celle de ces sphères dont il contient le centre : le cercle d'intersection est, par suite, normal aux cercles que les sphères inscrites possèdent dans le plan, et qui ont pour enveloppe la spirique. Les centres de ces cercles sont sur la conique suivant laquelle se projette le cercle lieu des centres des cercles méridiens du tore.

En appliquant ces considérations aux divers tores, on voit que *la spirique est de trois manières différentes l'enveloppe de cercles qui ont leurs centres sur une conique, et qui coupent orthogonalement un cercle fixe, c'est-à-dire qu'elle est anallagmatique par rapport à trois cercles. Les centres de ces cercles sont les centres d'inversion des quatre sommets sur l'axe. Les courbes déférentes sont des coniques.*

Ce résultat est une conséquence des théorèmes généraux connus pour les courbes du quatrième ordre qui ont deux points doubles à l'infini sur un cercle.

81. *Cercles d'inversion.* — Le premier cercle d'inversion a son centre au point O' où les axes des tores du premier couple rencontrent le plan de la spirique. Son rayon est égal à celui de la sphère orthogonale, c'est-à-dire aux tangentes menées du point O' du tore. Mais un méridien de ce tore coupe l'axe de la spirique aux points a_1 et a_2; le rayon du cercle d'inversion est donc moyen proportionnel entre $O'a_1$ et $O'a_2$, comme aussi entre $O'a_3$ et $O'a_4$. Nous voyons que le premier cercle d'inversion a pour diamètre le segment $e'f'$ compris entre les points doubles de l'involution quadratique dont a_1 et a_2, a_3 et a_4 sont deux couples.

Les trois cercles d'inversion de la spirique sont les cercles d'inversion

de l'involution spéciale du quatrième ordre déterminée par les quatre sommets que cette courbe possède sur son axe (n° **24**).

Chaque point de la spirique doit avoir sur la courbe tous ses réciproques et leurs symétriques par rapport à l'axe. Il en résulte que *les points d'une spirique sont répartis huit par huit en groupes semblables à ceux que j'ai définis au n°* **38**.

82. *Coniques déférentes.* — Une conique déférente étant la projection des cercles décrits par les centres des cercles méridiens des tores d'un même couple, son centre est au point G, centre des moyennes distances de la spirique et projection des centres de tous les tores droits qui passent par cette courbe (n° **75**). L'un des axes de la conique est perpendiculaire à l'axe de symétrie de la spirique; sa longueur est égale à $2a$ (n^os^ **80** et **75**). Si nous appelons l'autre axe $2c$, nous aurons

$$c = a\cos\omega,$$

d'où

$$a^2 - c^2 = a^2\sin^2\omega. \tag{17}$$

En vertu de la troisième des équations (11), la quantité $a^2\sin^2\omega$ a la même valeur pour tous les tores qui passent par une spirique; *les coniques déférentes sont donc homofocales*. Ce théorème est une conséquence de l'observation que j'ai présentée à la fin du n° **56**.

83. On trouve encore immédiatement que *les sommets que les coniques déférentes possèdent sur l'axe de la spirique sont les points milieux des segments interceptés par les sommets de cette courbe* (n° **40**). Ainsi la première conique a ses sommets aux points milieux des segments $a_1 a_2$ et $a_3 a_4$.

J'appellerai les trois coniques Γ', Γ'', Γ''' et leurs demi-axes c' et a', c'' et a'', c''' et a'''. On a

$$\left\{\begin{aligned} c' &= \pm\frac{x_1 + x_2}{2} = \mp\frac{x_3 + x_4}{2},\\ c'' &= \pm\frac{x_1 + x_3}{2} = \mp\frac{x_2 + x_4}{2},\\ c''' &= \pm\frac{x_1 + x_4}{2} = \mp\frac{x_2 + x_3}{2}. \end{aligned}\right. \tag{18}$$

84. D'après le théorème du n° 8, et eu égard à la proposition qui précède, *les sommets que les coniques déférentes ont sur l'axe de symétrie sont conjugués harmoniques des centres d'inversion considérés par couples*. On a, par suite,

$$(19) \qquad c'^2 = \lambda''\lambda''', \quad c''^2 = \lambda'\lambda''', \quad c'''^2 = \lambda'\lambda''.$$

Les formules (18) et (19) permettent de déterminer les sommets des coniques sur l'axe de symétrie, lorsqu'on connaît les quatre sommets de la spirique, ou bien les centres d'inversion et le point G.

85. Éliminant ω entre les équations (14) et (17), on trouve

$$(20) \qquad a^2 = c^2\left(1 - \frac{\lambda}{e}\right).$$

Eu égard aux équations (19), on peut écrire

$$(21) \qquad c^2 - a^2 = \frac{\lambda'\lambda''\lambda'''}{e}.$$

Si les sommets d'une spirique variable sont fixes, et que le point équatorial parcoure l'axe de symétrie, une quelconque des coniques déférentes passera d'un genre à un autre quand le point équatorial sera soit au centre d'inversion qui lui correspond, soit au centre G *des moyennes distances; l'abscisse du point équatorial et le binôme* $(c^2 - a^2)$ *qui détermine la position des foyers communs des spiriques changeront de signe en même temps.*

On reconnaît par l'équation (20) qu'*une conique déférente est une hyperbole lorsque le point équatorial est entre le centre d'inversion qui lui correspond et le centre* G *des moyennes distances.*

86. Quand le point équatorial est à l'infini, la spirique est une cartésienne (n° 63). L'équation (20) montre que, dans ce cas, les coniques déférentes sont des cercles.

L'enveloppe d'un cercle variable dont le centre parcourt un second

cercle, et qui, dans toutes ses positions, coupe normalement un troisième cercle, est une cartésienne.

Une cartésienne est de trois manières différentes l'enveloppe d'un cercle dont le centre parcourt un second cercle, et qui reste constamment normal à un troisième cercle.

Dans ce mode de génération, on reconnaît que la cartésienne a des rebroussements à l'infini, par l'observation finale du n° **48**.

87. Quand le point équatorial est au centre des moyennes distances, e est nul, et l'équation (20) donne pour a une grandeur infinie. Chaque déférente se compose alors de deux droites perpendiculaires à l'axe de symétrie. Les cercles normaux au cercle d'inversion, et qui ont leur centre sur l'une des deux droites, se coupent en deux points fixes. Un de ces cercles se réduit à l'axe, et la construction du n° **40** montre que cette droite tout entière fait partie de l'enveloppe. En résumé, on trouve deux fois une droite et quatre points situés sur elle.

88. On peut mener quatre tangentes communes à un cercle d'inversion et à la déférente correspondante; leurs points de contact avec le cercle sont des sommets de la spirique (n° **50**). Nous voyons ainsi qu'en outre des sommets qu'elle possède sur son axe, la spirique en a douze autres répartis quatre par quatre sur les trois cercles d'inversion. Chaque point de la spirique ayant tous ses réciproques sur cette courbe, les quatre sommets qui appartiennent à un même cercle d'inversion forment un groupe, et jouissent des propriétés qui ont été signalées aux n^{os} **22**, **23** et **24**.

Étude des cas dans lesquels les tores ordinaires qui passent par une spirique donnée sont réels.

89. Pour que les tores d'un couple soient réels, il faut d'abord que les centres des cercles méridiens situés dans le plan de la spirique aient des projections réelles, et, par suite, que l'abscisse c soit réelle.

Eu égard aux valeurs (18) et à l'expression du coefficient du second terme de l'équation (4) de l'Introduction, lorsque c est réel, l'abscisse λ l'est aussi. Cette abscisse détermine le point O où se croisent les axes des deux tores considérés.

En vertu de l'équation (14), les plans équatoriaux et les axes des tores n'existent que quand le point E et le centre d'inversion O sont de côtés différents du centre G des moyennes distances.

Lorsque les conditions qui viennent d'être indiquées sont satisfaites, les axes des deux tores et les centres des cercles méridiens sont réels; si donc la spirique a des sommets réels, les tores existeront, mais dans le cas contraire, il sera nécessaire de reconnaître si les rayons des cercles méridiens sont réels.

90. Soient b', b'', b''' les rayons des méridiens pour les tores des trois couples; C le centre de l'un des deux cercles qu'un tore du premier couple possède dans le plan principal de la spirique, a_{12} le milieu du segment $a_1 a_2$. On a

$$b'^2 = \overline{Ca_{12}}^2 + \overline{a_1 a_{12}}^2,$$

d'où

$$b'^2 = \left(\frac{x_1 + x_2}{2} - e\right)^2 \operatorname{tang}^2\omega' + \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2;$$

x_1 et x_2 sont les deux valeurs de x données par l'équation (10) du n° **27**. On a, en conséquence,

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \sqrt{\lambda''\lambda'''}, \quad \frac{x_1 - x_2}{2} = \sqrt{\lambda'(\lambda'' + \lambda''') - 2\lambda'\sqrt{\lambda''\lambda'''}}.$$

Introduisant ces valeurs dans l'expression de b'^2, et remplaçant $\operatorname{tang}^2\omega'$ par $-\frac{\lambda'}{e}$ (n° **77**), j'obtiens la première des équations suivantes (les deux autres sont données par des permutations) :

$$(22)\qquad \begin{cases} b'^2 = -\dfrac{\lambda'}{e}(e - \lambda'')(e - \lambda'''), \\ b''^2 = -\dfrac{\lambda''}{e}(e - \lambda')(e - \lambda'''), \\ b'''^2 = -\dfrac{\lambda'''}{e}(e - \lambda')(e - \lambda''). \end{cases}$$

Les sommets sur l'axe étant fixes, si le point équatorial se meut, le carré du rayon des cercles méridiens des tores d'un couple change de signe, quand ce point passe au centre des moyennes distances, à l'infini, et aux centres d'inversion où se croisent les axes des tores des autres couples.

91. Quand le point équatorial est à un centre d'inversion, à O″ par exemple, b' et b''' sont nuls et les tores des premier et troisième couples sont réduits à des cercles réels ou imaginaires. J'examinerai plus loin ces circonstances avec quelques détails; ici je me borne à remarquer que les deux cercles qui forment alors la spirique (n° **66**) peuvent être imaginaires et se couper en deux points réels. Ces points sont les intersections du plan de la courbe par les cercles qui remplacent les tores.

Le point E étant supposé en O″, b'' peut être réel, mais en appliquant la construction du n° **79**, on voit que les axes sont imaginaires. J'éloigne le cas où le centre des moyennes distances G coïnciderait aussi avec O″ (n° **98**).

92. Lorsque le point équatorial est à l'infini, la valeur de ω donnée par l'équation (14) est nulle, et, par suite, les axes des tores sont perpendiculaires au plan de la courbe. On obtient d'ailleurs, par les équations (22), des grandeurs infinies pour les trois rayons b', b'' et b'''.

Chacun des six tores qui passent par une spirique cartésienne, se décompose en quatre fois le plan de cette ligne.

93. Eu égard à l'équation (16), quand e est nul, c'est-à-dire quand le point équatorial coïncide avec le centre G, la courbe se décompose en deux fois son axe et deux fois la ligne de l'infini. Nous avons vu au n° **87** que la spirique comprend de plus quatre points sur son axe, et ce résultat sera établi plus loin d'une nouvelle manière (n° **110**).

L'équation (14) montre que, dans ce cas, les axes des tores sont confondus avec l'axe de symétrie de la courbe. Chaque tore se compose de cet axe considéré comme un cylindre de révolution de rayon nul, et de deux fois le plan de l'infini.

Tangentes doubles.

94. L'équation des tangentes doubles perpendiculaires à l'axe a été donnée au n° **65**. En y faisant p nul, on a

$$(q-r)x^2 + sx + \left(t - \frac{r^2}{4}\right) = 0.$$

Comme nous supposerons la spirique donnée par ses sommets sur l'axe et par son point équatorial, il convient d'éliminer r à l'aide de l'équation (12); on obtient

$$ex^2 - 2e^2x - 2\frac{e^2t}{s} + \frac{1}{8s}(2qe + s)^2 = 0.$$

La condition pour que les deux tangentes coïncident est

$$e^4 + e\left[2\frac{e^2t}{s} - \frac{1}{8s}(2eq + s)^2\right] = 0;$$

en développant, on obtient

$$e\left(e^3 + \frac{4t - q^2}{2s}e^2 - \frac{q}{2}e - \frac{s}{8}\right) = 0;$$

ou bien

$$e(e - \lambda')(e - \lambda'')(e - \lambda''') = 0.$$

Si les sommets sur l'axe sont fixes et le point équatorial mobile, les tangentes doubles perpendiculaires à l'axe coïncideront lorsque ce point sera confondu avec l'un des trois centres d'inversion, ce que nous avons déjà reconnu (n° **66**), et aussi lorsqu'il sera réuni au point G centre des moyennes distances et origine des abscisses. Dans ce dernier cas, les deux tangentes doubles se trouveront à l'infini.

L'axe est donc divisé par les points O', O'', O''' et G en quatre segments tels, que quand le point équatorial est sur l'un ou l'autre de deux d'entre eux, les tangentes doubles que nous considérons sont réelles, tandis qu'elles deviennent imaginaires quand le pointé quatorial passe sur un des deux autres segments.

95. Les plans qui touchent les tores et qui sont respectivement parallèles aux plans équatoriaux coupent le plan de la spirique suivant les tangentes doubles perpendiculaires à l'axe de symétrie (n° **59**). Ces tangentes sont nécessairement réelles quand les tores d'un couple sont réels.

96. D'après le théorème du n° **45**, les six tangentes doubles qui ne sont pas perpendiculaires à l'axe (n° **59**), passent deux à deux par les trois centres d'inversion, et sont respectivement perpendiculaires aux asymptotes des coniques déférentes.

97. Je n'examinerai pas les circonstances dans lesquelles une ou plusieurs des tangentes doubles sont réelles et idéales, parce que cette discussion conduit à distinguer dans la spirique un trop grand nombre de variétés, et introduit ainsi dans cette question une complication qui en diminue l'intérêt. Le problème, du reste, ne présente pas de difficulté au point de vue théorique.

Lorsqu'une conique déférente est une hyperbole, si le cercle d'inversion coupe une de ses asymptotes, la tangente double perpendiculaire est réelle et idéale (n° **40**).

En partant de l'équation de la spirique considérée comme une anallagmatique, on obtient une expression simple pour l'abscisse de la position qu'occupe le point équatorial lorsque les deux points de contact d'une tangente double perpendiculaire à l'axe coïncident. On détermine ainsi les segments de l'axe sur l'un desquels se trouve le point équatorial lorsque les tangentes doubles perpendiculaires à l'axe sont réelles et idéales.

Observations sur la spirique à centre.

98. Le coefficient p étant nul, si s l'est aussi, la spirique a un centre; elle possède alors deux axes de symétrie et deux plans principaux. Plusieurs des formules que j'ai obtenues ne sont pas applicables à ce cas. Il doit être entendu que p et s ne sont pas nuls en même temps.

Je consacrerai un Chapitre à l'étude des propriétés de la spirique à centre.

D'après l'équation (15) aucune valeur de λ n'est nulle quand s n'est pas nulle. Cette équation a été établie dans la supposition que l'origine se trouve au centre des moyennes distances. Nous voyons donc que, dans la spirique à un seul axe, ce centre ne peut pas coïncider avec un centre d'inversion.

(*La suite prochainement.*)

Mémoire sur le mouvement de la température dans le corps renfermé entre deux cylindres circulaires excentriques et dans des cylindres lemniscatiques;

Par M. Émile MATHIEU.

Si on se propose de trouver le mouvement de la température dans un cylindre droit dont la base est donnée, ainsi que la hauteur, et dont la surface est entretenue à une même température ou rayonne dans un milieu d'une température donnée, on commencera par résoudre ce problème dans la supposition que ce cylindre est indéfini, et que la température initiale est la même tout le long d'une droite parallèle aux génératrices. Alors on passera de ce cas particulier au cas proposé en suivant constamment la même marche, quelle que soit la nature de la section, et comme Poisson a traité ce problème dans toute sa généralité pour le cylindre de révolution, dans le XIXe cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, il a donné cette méthode très-simple d'ailleurs, sur laquelle il est inutile de revenir.

Ainsi, voulant étudier le mouvement de la température dans le corps renfermé entre deux cylindres droits circulaires excentriques, ou entre deux cylindres droits dont les bases sont des lemniscates de mêmes pôles, il nous suffit de les imaginer indéfinis, et de supposer dans l'intérieur de ce corps la température la même sur une droite parallèle aux génératrices.

Dans toutes les questions de distribution de la chaleur, on commence par chercher une solution dite *simple*, qui ne dépend du temps que par un facteur qui le renferme en exposant, et qui satisfait au problème, abstraction faite des conditions initiales; la solution générale est toujours la somme d'une infinité de ces solutions particulières.

Or, dans tous les problèmes traités jusqu'à présent, la solution simple jouit d'une propriété très-remarquable; en effet, dès que l'on adopte les coordonnées thermométriques de M. Lamé, cette solution simple est le produit de deux ou trois facteurs qui contiennent chacun une seule des deux ou trois coordonnées thermométriques. C'est ce que l'on reconnaît quand on considère la distribution de la chaleur dans une sphère ou dans un cylindre de révolution; questions traitées par Fourier dans un cas particulier, et étudiées dans toute leur généralité par Laplace et Poisson. C'est le résultat auquel est arrivé M. Lamé, quand il a résolu le problème de l'équilibre de température dans l'ellipsoïde; c'est ce que l'on trouverait encore pour le mouvement de la température dans le cylindre elliptique [*] et dans l'ellipsoïde, si on suppose toutefois dans ces deux dernières questions que les surfaces sont entretenues à une même température, mais non plus si elles rayonnent dans leur milieu; ce qui amène une distinction que l'on n'avait pas à faire pour la sphère et le cylindre de révolution.

Cette propriété de la solution simple donne une grande facilité pour la déterminer; car dès que cette forme est admise, on reconnaît que les facteurs qui la composent satisfont chacun à une équation différentielle du second ordre, et l'étude de la solution simple est ramenée à celle de ces équations différentielles et à la détermination de certaines constantes qui y entrent, et qu'on obtient par des conditions relatives à la surface du corps, ou par l'obligation de la solution à satisfaire à certaine lois de périodicité.

Mais, lorsqu'on considère d'autres corps, la solution simple n'a plus cette forme élégante, même lorsque la surface est entretenue à une même température, et sa recherche présente une difficulté d'un genre nouveau, que nous allons résoudre pour les deux corps cités.

Comme ce sujet ne peut pas être appliqué à la recherche des lois de

---

[*] La solution du problème de la distribution de la chaleur dans un cylindre elliptique dont la surface est entretenue à une même température, est la même que celle qui concerne le mouvement vibratoire d'une membrane elliptique, avec cette seule différence que les exponentielles relatives au temps sont remplacées par des sinus et cosinus. Si la surface du cylindre rayonne, la solution se déterminera d'après la méthode de ce Mémoire.

la nature, et que les solutions n'ont pas besoin d'être confirmées par l'expérience, nous ne développerons les calculs que jusqu'au point nécessaire pour faire comprendre les méthodes.

Distribution de la chaleur dans le corps renfermé entre deux cylindres circulaires excentriques.

1. Prenons trois axes rectangulaires des x, y, z, et l'axe des z parallèle aux génératrices du cylindre; la température v, si elle ne varie pas avec z, satisfait à l'équation

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} = k \frac{dv}{dt}.$$

Pour obtenir une solution simple, posons

$$v = ue^{-\frac{m^2}{k}t},$$

u sera donné par l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} = -m^2 u.$$

Aux coordonnées x et y substituons les deux autres α et β, au moyen des équations

$$(2) \qquad x = c\frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{e^\alpha + e^{-\alpha} - 2\cos\beta}, \quad y = \frac{2c\sin\beta}{e^\alpha + e^{-\alpha} - 2\cos\beta},$$

employées par M. Lamé dans ses *Leçons sur les Coordonnées curvilignes*, XIIe leçon. $\alpha =$ const. représente une famille de cercles qui passent tous par deux mêmes points imaginaires; $\beta =$ const. représente une autre famille de cercles orthogonaux aux premiers, et qui passent par deux mêmes points réels. Nous supposons que la section droite du corps cylindrique est composée de deux des cercles α.

Par la substitution indiquée, l'équation (1) devient

$$(3) \qquad \frac{d^2 u}{d\alpha^2} + \frac{d^2 u}{d\beta^2} = -\frac{4m^2c^2}{(e^\alpha + e^{-\alpha} - 2\cos\beta)^2} u,$$

et u devra satisfaire aussi à cette condition, de reprendre la même valeur pour des valeurs de α et de β, qui désignent un même point: or, d'après les formules (2), x et y restent les mêmes quand on augmente β de 2π; donc u doit être périodique par rapport à β, et avoir la période 2π.

Posons

$$\alpha = -\varepsilon + a,$$

a étant positif, et faisons

$$e^{-a} = \tau, \quad 2c\tau = f;$$

cette équation deviendra

$$(4) \qquad \frac{d^2u}{d\varepsilon^2} + \frac{d^2u}{d\beta^2} = -\frac{m^2 f^2 e^{2\varepsilon}}{(1 - 2\tau e^{\varepsilon}\cos\beta + \tau^2 e^{2\varepsilon})^2}\,u.$$

Si on fait la même transformation sur les équations (2), et qu'on transporte l'origine des coordonnées au point dont l'abscisse est c, et l'ordonnée o, on verra qu'en supposant $\tau = 0$ et $c = \infty$, de manière que $2c\tau = f$ soit fini, les cercles α deviennent concentriques.

Changer le signe de α revient à changer la direction des x positifs; on peut donc regarder α comme positif pour tous les points situés dans l'intervalle des deux cercles; prenons pour le cercle intérieur de la section

$$\varepsilon = 0,$$

nous fixons ainsi la valeur de a qui sera la valeur de α pour ce cercle. a est la plus grande valeur que prenne α dans l'intervalle des deux cercles de contour, donc ε est positif dans cet intervalle.

On doit remarquer qu'en faisant ε nul sur le contour intérieur, nous obtenons pour τ, qui est déjà au-dessous de l'unité, une valeur plus petite que si nous avions pris ε égal à zéro sur le contour extérieur.

2. Nous avons à imaginer que les deux surfaces cylindriques qui limitent le corps soient entretenues à une même température, ou qu'elles rayonnent dans un milieu dont la température est invariable.

Commençons par la première supposition, pour laquelle les calculs

se présentent un peu plus simplement; la surface cylindrique $\varepsilon = 0$ est entretenue à une température que l'on peut prendre pour le zéro de l'échelle thermométrique; u sera donc nul pour $\varepsilon = 0$, et en le développant suivant les puissances de ε, nous pouvons poser

$$(5) \qquad u = H_1 \varepsilon + H_2 \varepsilon^2 + H_3 \varepsilon^3 + H_4 \varepsilon^4 + \ldots,$$

en regardant H_1, H_2,... comme des fonctions de β seul. Développons

$$Z = e^{2\varepsilon}(1 - 2\tau e^{\varepsilon}\cos\beta + \tau^2 e^{2\varepsilon})^{-2},$$

suivant les puissances de ε, et écrivons

$$(6) \qquad Z = Z_0 + Z'_0 \varepsilon + Z''_0 \frac{\varepsilon^2}{1.2} + \ldots.$$

Or, on a

$$(1 - 2z\cos\beta + z^2)^{-2} = \left(1 - ze^{\beta\sqrt{-1}}\right)^{-2}\left(1 - ze^{-\beta\sqrt{-1}}\right)^{-2},$$

puis

$$\left(1 - ze^{\beta\sqrt{-1}}\right)^{-2} = 1 + 2ze^{\beta\sqrt{-1}} + 3z^2 e^{2\beta\sqrt{-1}} + \ldots + nz^{n-1} e^{(n-1)\beta\sqrt{-1}} + \ldots,$$
$$\left(1 - ze^{-\beta\sqrt{-1}}\right)^{-2} = 1 + 2ze^{-\beta\sqrt{-1}} + \ldots + nz^{n-1} e^{-(n-1)\beta\sqrt{-1}} + \ldots.$$

En faisant le produit de ces deux séries, on obtient

$$(1 - 2z\cos\beta + z^2)^{-2} = Q_0 + Q_1 z + Q_2 z^2 + \ldots,$$

si l'on pose

$$\frac{1}{2} Q_n = (n+1)\cos n\beta + 2n\cos(n-2)\beta$$
$$+ 3(n-1)\cos(n-4)\beta + 4(n-2)\cos(n-6)\beta + \ldots,$$

où $\frac{(n+2)^2}{8}$ est le dernier terme, si n est pair, et $\frac{(n+1)(n+3)}{4}\cos\beta$, si n est impair. Les premières valeurs de Q_n sont

$$Q_0 = 1, \quad Q_1 = 4\cos\beta, \quad Q_2 = 6\cos2\beta + 4,$$
$$Q_3 = 8\cos3\beta + 12\cos\beta, \quad Q_4 = 10\cos4\beta + 16\cos2\beta + 9, \ldots.$$

On a alors

$$Z = Q_0 e^{2\varepsilon} + Q_1 \tau e^{3\varepsilon} + Q_2 \tau^2 e^{4\varepsilon} + Q_3 \tau^3 e^{5\varepsilon} + \ldots,$$

et on en déduit, pour les coefficients du développement de Z,

$$Z_0 = Q_0 + Q_1 \tau + Q_2 \tau^2 + Q_3 \tau^3 + \ldots,$$

et, en général,

$$Z_0^{(n)} = 2^n Q_0 + 3^n Q_1 \tau + 4^n Q_2 \tau^2 + 5^n Q_3 \tau^3 + \ldots.$$

Substituons les développements (5) et (6) dans l'équation (4), et nous en déduirons

$$H_2 = 0, \quad 3.2 H_3 + \frac{d^2 H_1}{d\beta^2} = - m^2 f^2 Z_0 H_1,$$

$$4.3 H_4 + \frac{d^2 H_2}{d\beta^2} = - m^2 f^2 (Z_0 H_2 + Z'_0 H_1),$$

$$5.4 H_5 + \frac{d^2 H_3}{d\beta^2} = - m^2 f^2 \left(Z_0 H_3 + Z'_0 H_2 + \frac{Z''_0 H_1}{1.2}\right),$$

$$6.5 H_6 + \frac{d^2 H_4}{d\beta^2} = - m^2 f^2 \left(Z_0 H_4 + Z'_0 H_3 + \frac{Z''_0 H_2}{1.2} + \frac{Z'''_0 H_1}{1.2.3}\right),$$

. . . .

Il résulte de ces formules que H_1, H_2, H_3,... dépendent d'une seule fonction de β, qui est H_1, et nous allons la déterminer par les conditions que u ait la période 2π, et satisfasse à une seconde condition aux limites.

3. Supposons d'abord que τ soit très-petit, en sorte que l'on puisse négliger son carré; alors les deux cylindres seront très-peu excentriques.

Remarquons que pour $\tau = 0$, H_1 peut se réduire à $A \sin g\beta$, et posons

$$H_1 = A \sin g\beta + \tau [a \sin (g+1)\beta + b \sin (g-1)\beta].$$

Comme H doit avoir la période 2π, il faut que g soit un nombre

entier, et nous allons prouver que l'on peut choisir a et b de manière que u satisfasse à la seconde condition aux limites.

Dès que nous admettons pour H_1 l'expression précédente, il nous est aisé de former H_2, H_3, H_4,..., et comme dans leur calcul nous devons réduire les fonctions Z_0, Z'_0, Z''_0,... aux termes en τ^0 et τ, elles seront de la forme

$$2^n + 4.3^n \tau \cos\beta.$$

Il en résulte que les expressions de H_2, H_3, H_4,... seront toutes de la forme

$$A' \sin g\beta + \tau[a' \sin(g+1)\beta + b' \sin(g-1)\beta],$$

aussi bien que H. En faisant les calculs, on trouve

$$\begin{aligned}
6H_2 &= A(g^2 - m^2f^2)\sin g\beta \\
&\quad + \tau\left[\left(\overline{g+1}^2 - m^2f^2\right)a - 2m^2f^2A\right]\sin(g+1)\beta \\
&\quad + \tau\left[\left(\overline{g-1}^2 - m^2f^2\right)b - 2m^2f^2A\right]\sin(g-1)\beta, \\
6H_3 &= -Am^2f^2\sin g\beta - \tau m^2f^2(a+3A)\sin(g+1)\beta \\
&\qquad - \tau m^2f^2(b+3A)\sin(g-1)\beta, \\
20H_4 &= A\,\frac{(m^2f^2-g^2)^2 - 12m^2f^2)}{6}\sin g\beta \\
&\quad + \frac{\tau}{6}\Big\{\left[\left(\overline{g+1}^2 - m^2f^2\right)^2 - 12m^2f^2\right]a \\
&\qquad - m^2f^2(4g^2 - 4m^2f^2 + 4g + 56)A\Big\}\sin(g+1)\beta \\
&\quad + \frac{\tau}{6}\Big\{\left[\left(\overline{g-1}^2 - m^2f^2\right)^2 - 12m^2f^2\right]b \\
&\qquad - m^2f^2(4g^2 - 4m^2f^2 - 4g + 56)A\Big\}\sin(g-1)\beta.
\end{aligned}$$

. . . .

Comme la surface extérieure $\varepsilon = h$ est entretenue à la température zéro, de même que la surface intérieure, nous aurons à satisfaire à l'équation

$$H_1 h + H_3 h^3 + \ldots = 0, \tag{7}$$

et si on remplace H_1, H_3, H_4,... par leurs valeurs, on aura une équation de cette forme

$$L \sin g\beta + M \sin(g+1)\beta + M' \sin(g-1)\beta = 0,$$

qui entraîne les trois suivantes

$$L = 0, \quad M = 0, \quad M' = 0.$$

De la première on tirera l'inconnue m, puis des deux autres les inconnues a et b.

Supposons ensuite que τ ne soit pas assez petit pour que l'on puisse négliger τ^2, mais qu'il soit permis de ne point tenir compte des termes en τ^3; puis posons

$$\begin{aligned} H_1 = A \sin g\beta + \tau\,[a_1 \sin(g+1)\beta + b_1 \sin(g-1)\beta] \\ + \tau^2[a_2 \sin(g+2)\beta + b_2 \sin(g-2)\beta], \end{aligned}$$

a_1, b_1, a_2, b_2,... pouvant dépendre de τ, mais ne le contenant ni en facteur, ni en diviseur.

Dans le calcul de H_2, H_3,..., on réduira les fonctions Z_0, Z'_0,... à leurs trois premiers termes qui seront de la forme

$$l_0 + l_1 \cos\beta.\tau + (l_2 + l_3 \cos 2\beta)\tau^2,$$

l_0, l_1, l_2, l_3 désignant des nombres constants; on en conclut aisément que H_2, H_3,... seront encore de même forme que H_1. Et en portant leurs expressions dans l'équation (7), on aura une équation telle que

$$\begin{aligned} L \sin g\beta + M \sin(g+1)\beta + M' \sin(g-1)\beta \\ + N \sin(g+2)\beta + N' \sin(g-2)\beta = 0, \end{aligned}$$

de laquelle on déduit

$$L = 0, \quad M = 0, \quad M' = 0, \quad N = 0, \quad N' = 0.$$

Ces équations sont du premier degré par rapport à a_1, a_2, b_1, b_2, on les tirera des quatre dernières pour les porter dans la première, qui donnera m; de sorte que l'on en déduira aisément la valeur de H_1.

Cependant, dans ce qui précède, il faut supposer que g soit > 2. Si g était égal à l'unité, on prendrait pour l'expression de H_1

$$H_1 = A \sin\beta + \tau a_1 \sin 2\beta + \tau^2 a_2 \sin 3\beta,$$

H_2, H_3,... seraient de même forme, et la condition (7) conduirait à une équation qui renfermerait des termes en $\sin\beta$, $\sin 2\beta$ et $\sin 3\beta$, et qui se décomposerait en trois autres. Au moyen de ces trois équations on déduira les inconnues m, a_1, a_2.

Si g est égal à 2, on prendra pour l'expression de H_1

$$H_1 = A \sin 2\beta + \tau(a_1 \sin 3\beta + b \sin\beta) + \tau^2 a_2 \sin 4\beta.$$

4. Maintenant on reconnaît sans peine que H peut toujours se mettre sous la forme d'une série infinie

$$(a)\quad \left\{\begin{aligned} H_1 = A \sin g\beta &+ \tau[a_1 \sin(g+1)\beta + b_1 \sin(g-1)\beta] \\ &+ \tau^2[a_2 \sin(g+2)\beta + b_2 \sin(g-2)\beta] \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ \tau^{g-1}[a_{g-1} \sin(2g-1)\beta + b_{g-1}\sin\beta] \\ &+ \tau^g a_g \sin 2g\beta + \tau^{g+1} a_{g+1} \sin(2g+1)\beta + \ldots, \end{aligned}\right.$$

et on voit en même temps comment on pourra obtenir H_1 et la fonction u avec telle approximation qu'on voudra, d'après l'équation (7). Comme toute fonction impaire de β, continue et qui a la période 2π, peut être représentée pour une valeur quelconque de β par une série de sinus de multiples de β, et d'une seule manière, il est aisé de comprendre que la série qui donne H_1 est toujours convergente.

Dans l'expression de H_1 il n'entre que des sinus; en supposant que H_1 se réduise à $A \cos g\beta$ pour $\tau = 0$, on mettra de même cette fonction sous cette forme

$$(b)\quad \left\{\begin{aligned} H_1 = A \cos g\beta &+ \tau[a_1 \cos(g+1)\beta + b_1 \cos(g-1)\beta] \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ \tau^{g-1}[a_{g-1} \cos(2g-1)\beta + b_{g-1}\cos\beta] \\ &+ \tau^g a_g \cos 2g\beta + \tau^{g+1} a_{g+1} \cos(2g+1)\beta + \ldots, \end{aligned}\right.$$

et on sera conduit aux mêmes calculs que lorsqu'on prend pour cette fonction une série de sinus.

Si τ est assez petit pour que l'on puisse négliger les termes en τ^g et les puissances supérieures de τ, il est aisé de reconnaître que l'on trouvera pour m et les coefficients $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_{g-1}, b_{g-1}$ les mêmes valeurs, soit qu'on adopte pour H l'expression (a), soit au contraire l'expression (b). Mais si l'on doit tenir compte de ces termes, la quantité m et les coefficients $a_1, b_1, a_2, b_2 \ldots$ ont des valeurs différentes; de sorte que l'on ne peut prendre la somme des deux valeurs correspondantes de u pour en faire une solution de l'équation (4).

5. Supposons maintenant que l'une des deux surfaces ou toutes les deux rayonnent dans un milieu à la température zéro; nous allons voir que la méthode de solution reste la même.

Le flux de chaleur qui traverse la surface est proportionnel à l'excès de la température du corps sur celle du milieu ambiant, et ce flux a aussi pour expression $-dv$ divisé par l'élément de la normale à la surface; cet élément a pour valeur

$$-\frac{d\alpha}{\sqrt{\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^2}}=\frac{-2c\,d\alpha}{e^\alpha+e^{-\alpha}-2\cos\beta},$$

s'il est mené en dehors de la surface; il doit être pris avec un signe contraire, s'il est mené à l'intérieur. On a donc

$$\frac{e^\alpha+e^{-\alpha}-2\cos\beta}{2c}\frac{dv}{d\alpha}\mp lv=0,$$

suivant qu'il s'agit de la surface extérieure ou de la surface intérieure.

Remettons la variable ε dans cette équation; puis mettons, comme il est permis, u au lieu de v, nous obtiendrons

$$(8)\qquad (e^{-\varepsilon}-2\tau\cos\beta+\tau^2e^\varepsilon)\frac{du}{d\varepsilon}\pm flu=0.$$

Si cette équation a lieu à la surface $\varepsilon=0$, posons

$$u=\mathrm{U}+\mathrm{U}_1\varepsilon+\mathrm{U}_2\varepsilon^2+\mathrm{U}_3\varepsilon^3+\ldots,$$

et nous aurons pour la première condition des limites

$$(9)\qquad (1 - 2\tau\cos\beta + \tau^2)\,U_1 - flU = 0.$$

Substituons cette série à la place de u dans l'équation (4), et nous aurons

$$2U_2 + \frac{d^2U}{d\beta^2} = -m^2f^2U,$$

$$3.2U_3 + \frac{d^2U_1}{d\beta^2} = -m^2f^2(Z_0U_1 + Z'_0U),$$

$$4.3U_4 + \frac{d^2U_2}{d\beta^2} = -m^2f^2\left(Z_0U_2 + Z'_0U_1 + Z''_0\frac{U}{1.2}\right),$$

. . . .

Il résulte encore de ces équations et de l'équation (9) que toutes les fonctions U, U_1, U_2, ... peuvent être exprimées au moyen de la seule U_1. On prendra pour U_1 ou la série (a) ou la série (b), et les fonctions U, U_2, U_3, ... seront des séries toutes semblables.

Restera à satisfaire à l'équation (7) ou à l'équation (8), dans laquelle on met h au lieu de ε; or on pourra agir comme dans la solution précédente et calculer les coefficients de U_1 avec l'approximation que l'on voudra.

6. L'état calorifique du corps résulte de la superposition d'une infinité des états simples que nous venons de calculer.

Soient u et u' deux solutions simples qui satisfont aux équations

$$\frac{d^2u}{d\varepsilon^2} + \frac{d^2u}{d\beta^2} = \frac{-m^2f^2e^{2\varepsilon}}{(1 - 2\tau e^{\varepsilon}\cos\beta + \tau^2e^{2\varepsilon})^2}\,u,$$

$$\frac{d^2u'}{d\varepsilon^2} + \frac{d^2u'}{d\beta^2} = \frac{-m'^2f^2e^{2\varepsilon}}{(1 - 2\tau e^{\varepsilon}\cos\beta + \tau^2e^{2\varepsilon})^2}\,u'.$$

Multiplions ces équations par u' et u et retranchons; nous aurons

$$u'\frac{d^2u}{d\varepsilon^2} - u\frac{d^2u'}{d\varepsilon^2} + u'\frac{d^2u}{d\beta^2} - u\frac{d^2u'}{d\beta^2}$$
$$= -f^2(m^2 - m'^2)\frac{e^{2\varepsilon}uu'}{(1 - 2\tau e^{\varepsilon}\cos\beta + \tau^2e^{2\varepsilon})^2}.$$

Multiplions par $d\varepsilon d\beta$ et intégrons par rapport à ε de o à h, et par rapport à β de o à 2π; nous aurons

$$\int_0^{2\pi}\left[u'\frac{du}{d\varepsilon}-u\frac{du'}{d\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=h}d\beta+\int_0^{h}\left[u'\frac{du}{d\beta}-u\frac{du'}{d\beta}\right]_{\beta=0}^{\beta=2\pi}d\alpha$$
$$=-f^2(m^2-m'^2)\int_0^h\int_0^{2\pi}e^{2\varepsilon}uu'(1-2\tau e^{\varepsilon}\cos\beta+\tau^2e^{2\varepsilon})^{-2}d\varepsilon d\beta.$$

Le seconde quantité entre crochets est nulle, parce que u et u' ont la période 2π, et la première quantité entre crochets est nulle aussi, soit qu'aux limites u et u' s'annulent, soit qu'ils satisfassent à l'équation (8).

Les aires représentées par les intégrales du premier membre sont donc nulles aussi, et on a

$$(10)\qquad \int_0^h\int_0^{2\pi}e^{2\varepsilon}uu'(1-2\tau e^{\varepsilon}\cos\beta+\tau^2e^{2\varepsilon})^{-2}d\varepsilon d\beta=0.$$

On prendra pour v

$$v=\sum\sum \mathrm{A}u(g,m)e^{\frac{-m^2}{k}t}+\sum\sum \mathrm{B}u'(g,m')e^{\frac{-m'^2}{k}t},$$

en désignant par $u\,(g, m)$ la solution en série de sinus qui dépend des deux quantités g et m, par $u'\,(g, m')$ la solution en série de cosinus qui dépend de g et m', et les deux signes de sommation se rapportent l'un aux valeurs entières de g depuis zéro jusqu'à l'infini, l'autre au nombre infini de valeurs que prend m pour chaque valeur de g. On déterminera les coefficients A, B par un calcul bien connu d'apres l'état initial et en s'appuyant sur la formule (10).

7. Faisons quelques remarques au sujet des expressions trouvées pour u.

Il est bon d'abord de noter que pour $g = 0$ la série de sinus qui donne u s'annule.

Si on considère une membrane dont les deux contours soient des cercles excentriques, le déplacement vibratoire des points de cette

membrane sera exprimé par le produit de u du n° 2 par le sinus ou le cosinus d'un arc proportionnel au temps.

Les lignes nodales de cette membrane rencontrent les deux contours circulaires à angle droit. En effet, $\varepsilon = 0$ étant l'équation du cercle intérieur, u est de la forme

$$u = \mathrm{U}_1 \varepsilon + \mathrm{U}_3 \varepsilon^3 + \ldots,$$

U_1, U_3, ... désignant des fonctions de β. Supposons ε très-petit. u s'annulera pour les racines β de l'équation

$$\mathrm{U}_1 + \mathrm{U}_3 \varepsilon^2 + \ldots = 0,$$

et pour avoir la direction de la tangente à une ligne nodale sur le cercle $\varepsilon = 0$, il faudra négliger les termes en ε^2, et, comme les termes en ε manquent, l'équation se réduit à

$$\mathrm{U}_1 = 0$$

et ne contient que β. Donc les éléments de ces courbes se confondent près du cercle $\varepsilon = 0$ avec ceux des cercles β et sont normaux au premier cercle.

Comme le cercle du contour extérieur pourrait être aussi représenté par $\varepsilon = 0$, on a à son égard les mêmes conclusions.

Dans le cas où les deux cercles de contour ont le même centre, on sait que les lignes nodales se confondent avec des cercles α qui deviennent concentriques et avec des cercles β qui deviennent des diamètres des premiers. Il est naturel de se demander si la même propriété subsiste dans le cas général, mais elle n'existe plus; toutefois il nous suffit d'indiquer cette absence de propriété.

Cylindre circulaire plein.

8. On ne peut appliquer les calculs précédents lorsque le cylindre circulaire cesse d'être annulaire pour devenir plein. Il est vrai que l'on sait trouver le mouvement de la température dans un cylindre de révolution et que les coordonnées polaires habituelles sont alors de

beaucoup les plus commodes. Mais il est important pour la philosophie de la science de voir comment on traiterait cette question en conservant les coordonnées α et β et de rechercher ce que devient la solution simple. Nous ne nous occuperons toutefois que du cas où la surface extérieure est entretenue à une même température; c'est alors la même question que si on cherchait le mouvement vibratoire d'une membrane circulaire dont on aurait fixé et rendu horizontal un élément ailleurs qu'au centre. Enfin nous verrons que la solution que nous allons donner est immédiatement applicable au cylindre dont la section droite est une lemniscate ovoïde.

Dans l'équation (3) du n° 1, faisons

$$\alpha = \varepsilon + a, \quad e^{-a} = \tau, \quad mc\tau = n,$$

elle deviendra

$$\frac{d^2u}{d\varepsilon^2} + \frac{d^2u}{d\beta^2} = -\frac{4n^2e^{-2\varepsilon}}{(1 - 2\tau e^{-\varepsilon}\cos\beta + \tau^2 e^{-2\varepsilon})^2}u.$$

Posons

$$e^{-\varepsilon} = r,$$

nous aurons l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^2u}{dr^2}r^2 + \frac{du}{dr}r + \frac{d^2u}{d\beta^2} = -4n^2r^2(1 - 2\tau r\cos\beta + \tau^2r^2)^{-2}u,$$

dans laquelle τ et r sont < 1.

Ensuite, d'après ce qu'on a vu au n° 2, on a

$$(2) \qquad (1 - 2\tau r\cos\beta + \tau^2r^2)^{-2} = Q_0 + Q_1\tau r + Q_2\tau^2r^2 + Q_3\tau^3r^3 + \ldots$$

avec

$$Q_0 = 1, \quad Q_1 = 4\cos\beta, \quad Q_2 = 6\cos 2\beta + 4,$$
$$Q_3 = 8\cos 3\beta + 12\cos\beta, \ldots,$$

et cette série est toujours convergente parce que τr est < 1.

Prenons pour g un nombre entier et faisons

$$(3) \qquad u = Pr^g + P_1r^{g+1} + P_2r^{g+2} + \ldots,$$

puis portons cette expression et le second membre de (2) dans l'équation (1), nous obtiendrons cette suite d'équations

$$\frac{d^2 P}{d\beta^2} + g^2 P = 0,$$

$$\frac{d^2 P_1}{d\beta^2} + (g+1)^2 P_1 = 0,$$

$$\frac{d^2 P_2}{d\beta^2} + (g+2)^2 P_2 - 4n^2 P = 0,$$

$$\frac{d^2 P_3}{d\beta^2} + (g+3)^2 P_3 - 4n^2 P_1 - 4n^2 \tau P Q_1 = 0,$$

$$\frac{d^2 P_4}{d\beta^2} + (g+4)^2 P_4 - 4n^2 P_2 - 4n^2 \tau P_1 Q_1 - 4n^2 \tau^2 P Q_2 = 0,$$

. . . .

De la première on tire

$$P = A \sin g\beta + A' \cos g\beta;$$

mais pour simplifier l'écriture, réduisons d'abord cette expression à

$$P = A \sin g\beta;$$

et quand nous aurons obtenu l'expression qui en résulte pour u, il nous sera aisé de revenir à l'expression générale. De la seconde équation on tirera

$$P_1 = B \sin(g+1)\beta,$$

B étant un coefficient arbitraire. La troisième donnera

$$P_2 = a \sin g\beta, \quad a = -\frac{n^2 A}{g+1}.$$

Pour résoudre la quatrième, on posera

$$P_3 = b \sin(g+1)\beta + c \sin(g-1)\beta,$$

et on aura

$$b = -\frac{2n^2\tau A + n^2 B}{g+2}, \quad c = -\frac{n^2 \tau A}{g+1}.$$

Avant d'aller plus loin, faisons une simplification. Dans ces formules, g désigne un nombre entier comme dans les numéros précédents où nous avons vu que l'expression de u s'annule pour $g = 0$, quand elle se rapporte à un cylindre dont la section droite est composée de deux cercles; cette propriété, devant subsister quelque petit que soit le cercle intérieur, doit avoir encore lieu quand il disparaît. Or, pour arriver à ce résultat, il faut faire $B = 0$; on a donc

$$P = A \sin g\beta, \quad P_1 = 0, \quad P_2 = -\frac{n^2 A}{g+1} \sin g\beta,$$
$$P_3 = -\frac{2n^2\tau A}{g+2} \sin(g+1)\beta - \frac{n^2\tau A}{g+1} \sin(g-1)\beta.$$

On aura ensuite

$$P_4 = R_1 \sin(g+2)\beta + R_2 \sin g\beta + R_3 \sin(g-2)\beta,$$

avec

$$R_1 = -\frac{3n^2\tau^2 A}{g+3}, \quad R_2 = -\frac{4n^2\tau^2 A + n^2 a}{2(g+2)}, \quad R_3 = -\frac{n^2\tau^2 A}{g+1}.$$

On voit comment on peut calculer successivement les termes de la série qui donne u. Ensuite, si nous reprenons pour P sa première valeur, il faudra à l'expression de u en ajouter une autre qui se déduit de la première en changeant le facteur A en A′ et les sinus en cosinus.

9. Quand on aura poussé le développement assez loin, on n'aura plus qu'une condition à remplir, celle qui est relative à la surface, et il reste une seule indéterminée n pour y satisfaire.

Si on borne u à la serie des sinus, son expression pourra se mettre sous la forme

$$(A)\quad \left\{ \begin{aligned} u = U \sin g\beta &+ \tau [U_1 \sin(g+1)\beta + U'_1 \sin(g-1)\beta] \\ &+ \tau^2 [U_2 \sin(g+2)\beta + U'_2 \sin(g-2)\beta] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned} \right.$$

U, U_1, U'_1,... étant des fonctions de r seul, qui dépendent de τ, mais ne le renferment ni en facteur, ni en diviseur, et on a

$$U = A r^g \left\{ 1 - \frac{n^2}{g+1} r^2 + \left[\frac{n^4}{1.2(g+1)(g+2)} - \frac{2 n^2 \tau^2}{g+2} \right] r^4 - \ldots \right\}.$$

u doit être nul sur le contour extérieur $r = \rho$, quel que soit β; donc, désignant en général U par $U(r, n)$, si on peut satisfaire à cette condition, c'est qu'en choisissant n de manière à satisfaire à

$$U(\rho, n) = 0,$$

on aura une valeur de n qui pour $r = \rho$ annulera toutes les fonctions U_1, U'_1, U_2, U'_2,.... Nous allons démontrer cette propriété.

10. Posons, pour simplifier,

$$4 n^2 = \varphi,$$

u est donné par l'équation

$$(4) \qquad \frac{d^2u}{dr^2} r^2 + \frac{du}{dr} r + \frac{d^2u}{d\beta^2} = - \frac{\varphi r^2}{(1 - 2\tau r \cos\beta + \tau^2 r^2)^2} u,$$

et de plus il est assujetti à la condition d'être nul pour $r = \rho$.

Si τ est nul, l'équation précédente devient, en remplaçant φ par Φ,

$$\frac{d^2u}{dr^2} r^2 + \frac{du}{dr} r + \frac{d^2u}{d\beta^2} = - \Phi r^2 u,$$

et u se réduit au produit de $A \sin g\alpha + A' \cos g\alpha$ par une fonction de r, $Q(r, \Phi)$ qui satisfait à l'équation

$$\frac{d^2Q}{dr^2} r^2 + \frac{dQ}{dr} r + (g^2 - \Phi r^2) Q = 0,$$

et exprimée par la série

$$r^g \left[1 - \frac{\Phi r^2}{4(g+1)} + \frac{\Phi^2 r^4}{1.2.4^2(g+1)(g+2)} - \frac{\Phi^3 r^6}{1.2.3.4^3(g+1)(g+2)(g+3)} + \ldots \right].$$

Comme Q est de plus assujetti à s'annuler pour $r = \rho$, Φ est susceptible d'une infinité de valeurs

$$(a) \qquad \Phi_1, \quad \Phi_2, \quad \Phi_3, \quad \ldots,$$

que nous supposerons rangées par ordre de grandeur croissante, et qui sont les racines de l'équation

$$Q(\rho, \Phi) = 0.$$

Imaginons que l'on fasse croître τ à partir de zéro, que l'on se donne la valeur du nombre entier g, et la valeur initiale de φ qui se trouve dans la série (a), enfin que u satisfasse constamment à l'équation (4), et à la condition

$$u = 0 \quad \text{pour} \quad r = \rho.$$

Donnons à τ supposé quelconque l'accroissement infiniment petit $\partial\tau$, φ subira une variation $\partial\varphi$, et désignons par $u' = u + \partial u$ ce que devient u.

Nous obtenons l'équation en u' en augmentant le second membre de l'équation (4) de ses différentielles ∂ par rapport à τ et à φ, et il en résulte

$$\begin{aligned} &\frac{d^2u'}{dr^2}r^2 + \frac{du'}{dz}r + \frac{d^2u'}{d\beta^2} \\ &\quad = -\left[\frac{(\varphi + \partial\varphi)r^2}{(1 - 2\tau r\cos\beta + \tau^2r^2)^2} + \frac{4\varphi(r^3\cos\beta - \tau r^4)}{(1 - 2\tau r\cos\beta + \tau^2r^2)^3}\partial\tau\right]u'. \end{aligned}$$

Multiplions cette équation par u, l'équation (4) par u', et retranchons l'une de l'autre, nous aurons

$$\begin{aligned} &\left(u\frac{d^2u'}{dr^2} - u\frac{d^2u'}{dr^2}\right)r^2 + \left(u\frac{du'}{dr} - u'\frac{du}{dr}\right)r + u\frac{d^2u'}{d\beta^2} - u'\frac{d^2u}{d\beta^2} \\ &\quad = -\frac{r^2uu'}{(1 - 2\tau r\cos\beta + \tau^2r^2)^2}\partial\varphi - \frac{4\varphi(r^3\cos\beta - \tau r^4)uu'}{(1 - 2\tau r\cos\beta + \tau^2r^2)^3}\partial\tau. \end{aligned}$$

Multiplions cette équation par $\frac{dr}{r}d\beta$, et intégrons par rapport à r

de o à ρ, et par rapport à β de o à 2π, nous obtiendrons

$$(5)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{2\pi}\left(ru\frac{du'}{dr}-ru'\frac{du}{dr}\right)_0^\rho d\beta+\int_0^\rho\left(\frac{u}{r}\frac{du'}{d\beta}-\frac{u'}{r}\frac{du}{d\beta}\right)_0^{2\pi}dr \\ \displaystyle\quad =-\delta\varphi\int_0^\rho\int_0^{2\pi}\frac{uu'r\,dr\,d\beta}{(1-2\tau r\cos\beta+\tau^2r^2)^2} \\ \displaystyle\qquad -4\varphi\delta\tau\int_0^\rho\int_0^{2\pi}\frac{(r^2\cos\beta-\tau r^3)\,uu'\,dr\,d\beta}{(1-2\tau r\cos\beta+\tau^2r^2)^3}. \end{cases}$$

u et u' sont nuls pour $r=\rho$; donc la première quantité entre parenthèses est nulle; u et u' ont par rapport à la variable β la période 2π; la seconde quantité entre parenthèses est donc nulle aussi, car, si on se reporte à l'expression de u et à celle de u' qui s'en déduit par le changement de τ en $\tau+\delta\tau$ et de φ en $\varphi+\delta\varphi$, on reconnaît qu'elle ne devient pas ∞ pour $r=0$; donc le second membre seul subsiste. Il en résulte l'équation

$$(6)\quad 0=\frac{d\varphi}{d\tau}\int_0^\rho\int_0^{2\pi}\frac{u^2r\,dr\,d\beta}{(1-2\tau r\cos\beta+\tau^2r^2)^2}+4\varphi\int_0^\rho\int_0^{2\pi}\frac{(r^2\cos\beta-\tau r^3)\,u^2dr\,d\beta}{(1-2\tau r\cos\beta+\tau^2r^2)^3};$$

car on peut dans le second membre remplacer u' par u, qui en diffère infiniment peu.

On sait que φ a pour $\tau=0$ la valeur Φ, et d'après cette équation on peut calculer la valeur que prend φ pour une valeur quelconque de τ.

Il est aisé de se convaincre que φ est déterminé au moyen de cette équation. En effet, posons

$$\varphi=\Phi+p_1\tau+p_2\tau^2+p_3\tau^3+\ldots,$$

nous aurons

$$\frac{d\varphi}{d\tau}=p_1+2p_2\tau+3p_3\tau^2+\ldots;$$

remplaçons u par son expression (3), qui renferme $4n^2$ ou φ, que nous remplaçons à son tour par la série qui le représente. Enfin imaginons que l'on développe l'équation (6) suivant les puissances de τ. Si on veut calculer seulement p_1, il suffit d'employer les termes en τ^0 de l'équation (6), et de mettre dans u Φ au lieu de φ. Si on veut ensuite calculer p_2, il suffit d'employer les termes en τ, et de remplacer dans u φ par $\Phi+p_1\tau$. Et ainsi de suite.

11. Considérons la fonction u donnée par l'expression (3); pour $\tau = 0$ elle se réduit à

$$(\mathrm{A} \sin g\alpha + \mathrm{A}' \cos g\alpha)\,\mathrm{Q}(r, \Phi),$$

qui est nul pour $r = \rho$; or supposons que l'équation (6) ait lieu, et nous allons prouver que u sera nul pour $r = 0$, quel que soit τ.

Pour arriver à cette démonstration, au lieu de supposer que u est nul pour $r = \rho$ lorsque $\tau = 0$, concevons qu'il le soit lorsque τ a une certaine valeur, et, laissant toutes les autres choses les mêmes, cherchons à démontrer que u restera encore nul pour $r = \rho$ lorsque τ s'accroîtra de $\partial\tau$. On en déduira immédiatement la proposition dont il s'agit, en imaginant que l'on fasse successivement croître τ depuis zéro par degrés infiniment petits.

Or, d'après l'hypothèse, l'équation (5) se réduit à

$$\int_0^{2\pi} r u' \frac{du}{dr} d\beta = 0 \quad \text{pour} \quad r = \rho,$$

ou, en observant que u' est égal à $u + \frac{du}{d\tau}\partial\tau$, à cette autre

$$\int_0^{2\pi} \left(r \frac{du}{d\tau}\frac{du}{dr}\right) d\beta = 0 \quad \text{pour} \quad r = \rho,$$

Je dis que $\frac{du}{d\tau}$ est nul pour $r = \rho$. En effet u s'annule pour $r = \rho$; si, lorsque τ s'accroît de $\partial\tau$, u qui devient u' n'est pas nul pour $r = \rho$, il le sera pour $r = \rho + \partial\rho$, $\partial\rho$ étant peut-être variable avec β, et en tout cas donné par

$$\frac{du}{dr}\partial\rho + \frac{du}{d\tau}\partial\tau = 0,$$

ou

$$\partial\rho = -\frac{\frac{du}{d\tau}}{\frac{du}{dr}}\partial\tau.$$

Il suit de là que $\frac{du}{dr}$ ne peut s'annuler pour aucune valeur de β, sans que $\frac{du}{d\tau}$ s'annule aussi; car il est impossible que $\partial\rho$ soit infini.

Supposons au contraire que u étant nul pour $r = \rho$ on donne à ρ un accroissement $\partial\rho$ indépendant de β; si u reste nul pour $r = \rho + \partial\rho$, τ subit une variation $\partial\tau$ donnée par

$$\partial\tau = -\frac{\frac{du}{dr}}{\frac{du}{d\tau}}\partial\rho;$$

or, $\partial\tau$ ne pouvant être infini pour aucune valeur de β, il est encore impossible que $\frac{du}{d\tau}$ s'annule sans que $\frac{du}{dr}$ s'annule en même temps.

Donc, si on fait varier β de zéro à 2π, les deux fonctions dérivées $\frac{du}{dr}$, $\frac{du}{d\tau}$ s'annuleront pour les mêmes valeurs de β, et elles changeront de signe en même temps. Il s'ensuit que tous les éléments de l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} r\frac{du}{d\tau}\frac{du}{dr}d\beta \quad \text{pour} \quad r = \rho,$$

seraient de même signe, tandis qu'elle doit être nulle. Donc il faut bien admettre que $\frac{du}{d\tau}$ est nul quel que soit β, et u reste nul pour $r = \rho$ après la variation de τ; ce qu'il fallait démontrer.

D'après ce qui précède, toute quantité φ qui se réduit pour $\tau = 0$ à un terme Φ_s de la série (a), et qui est assujettie à l'équation (6), a une valeur parfaitement déterminée que nous représenterons par

$$(7) \qquad \varphi = \varphi_s(g, \tau, \rho),$$

afin d'indiquer les grandeurs dont elle dépend. Ensuite si on a $u = 0$ pour $r = \rho$, φ est donné par l'équation (7), et réciproquement, si φ est donné par l'équation (7), on a $u = 0$ pour $r = \rho$.

12. Il est bon d'indiquer une vérification de ce qui précède.

Si on calcule les fonctions U, U_1, U'_1, U_2, U'_2 qui entrent dans l'expression (A) de u en négligeant dans cette dernière le puissances de τ

supérieures à la deuxième, on a

$$U = A r^g \Big\{ 1 - \frac{n^2}{g+1} r^2 + \left[\frac{n^4}{1.2(g+1)(g+2)} - \frac{2n^2\tau^2}{g+2}\right] r^4$$
$$- \left[\frac{n^6}{1.2.3(g+1)(g+2)(g+3)} - \frac{2n^4(2g+3)\tau^2}{(g+1)(g+2)(g+3)}\right] r^6$$
$$+ \left[\frac{n^8}{2.3.4(g+1)(g+2)(g+3)(g+4)} - \frac{3n^6\tau^2}{(g+1)(g+3)(g+4)}\right] r^8$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Big\},$$

$$U_1 = A r^{g+3} \Big\{ - \frac{n^2(2g+2)}{(g+1)(g+2)} + \frac{n^4(2g+3)}{(g+1)(g+2)(g+3)} r^2$$
$$- \frac{n^6(2g+4)}{1.2(g+1)(g+2)(g+3)(g+4)} r^4$$
$$+ \frac{n^8(2g+5)}{1.2.3(g+1)(g+2)(g+3)(g+4)(g+5)} r^6$$
$$- \frac{n^{10}(2g+6)}{2.3.4(g+1)\ldots(g+6)} r^8 + \ldots \Big\},$$

$$U'_1 = A r^{g+3} \Big\{ - \frac{n^2}{g+1} + \frac{n^4}{1(g+1)(g+2)} r^2 - \frac{n^6}{1.2(g+1)(g+2)(g+3)} r^4$$
$$+ \frac{n^8}{1.2.3(g+1)(g+2)(g+3)(g+4)} r^6 + \ldots \Big\},$$

$$U_2 = n^2 A r^{g+4} \Big\{ - \frac{3}{g+3} + \frac{5g^2+20g+18}{(g+1)(g+2)(g+3)(g+4)} n^2 r^2$$
$$- \frac{21g^2+105g+120}{2.3(g+1)\ldots(g+5)} n^4 r^4 + \frac{3g^2+18g+25}{2(g+1)\ldots(g+6)} n^6 r^6$$
$$- \frac{11g^2+77g+126}{24(g+1)\ldots(g+7)} n^8 r^8 + \ldots \Big\},$$

$$U'_2 = n^2 A r^{g+4} \Big\{ - \frac{1}{g+1} + \frac{3n^2}{2(g+1)(g+2)} r^2 - \frac{n^4}{(g+1)(g+2)(g+3)} r^4$$
$$+ \frac{5n^6}{12(g+1)(g+2)(g+3)(g+4)} r^6 - \ldots \Big\}.$$

Divisons U_1, U'_1, U_2, U'_2 par U, et comme nous négligeons dans u les termes en τ^3, on n'a pas à avoir égard dans la division aux termes de U qui multiplient τ^2. Si l'on désigne par V_1, V'_1, V_2, V'_2 les quotients de U_1 U'_1, U_2, U'_2 par U, on trouve que V_1 et V'_1 ne présentent au-

cune variation de signes, et que V_2 et V'_2 en offrent une seulement. Donc $U_1 = 0$, $U'_1 = 0$ perdent toutes leurs racines réelles n quand on divise leur premier membre par U, et n'ont pour racines que celles de $U = 0$. V_2 et V'_2 n'ont qu'une variation de signe; $U_2 = 0$ et $U'_2 = 0$ ont donc aussi toutes les racines n de $U = 0$. Par conséquent on peut trouver une valeur de n qui satisfasse aux équations

$$U(\rho, n) = 0,\ U_1(\rho, n) = 0,\ U'_1(\rho, n) = 0,\ U_2(\rho, n) = 0,\ U'_2(\rho, n) = 0,$$

en cherchant seulement une racine de la première. Nous nous dispensons d'écrire les séries qui représentent V_1, V'_1, V_2, V'_2, à cause de leur complication.

13. Nous allons maintenant démontrer que la fonction u donnée par la série (3) qui est nulle pour $r = \rho$, quel que soit β, est nulle aussi pour une infinité de valeurs de r, dont quelques-unes en général sont plus petites que ρ.

Lemme I. — Les quantités

$$\Phi_1,\quad \Phi_2,\quad \Phi_3\ldots,\quad \Phi_s,\ldots,\quad \Phi_t,\ldots$$

étant rangées par ordre de grandeur croissante, je dis que les valeurs correspondantes de φ

$$\varphi_1,\quad \varphi_2,\quad \varphi_3\ldots,\quad \varphi_s,\ldots,\quad \varphi_t,\ldots,$$

le sont aussi, quel que soit τ.

En effet, admettons que le contraire ait lieu, et que pour une valeur de τ, φ_t soit $< \varphi_s$. Or Φ_t est $> \Phi_s$, c'est-à-dire que φ_t est $> \varphi_s$ pour $\tau = 0$; entre zéro et cette valeur de τ il existerait donc une autre valeur τ' de τ pour laquelle φ_t serait égal à φ_s. Dans l'équation (6) u ne dépend que de φ et de τ, et si on calcule

$$\partial\varphi_t = \frac{d\varphi_t}{d\tau}\partial\tau \quad \text{et} \quad \partial\varphi_s = \frac{d\varphi_s}{d\tau}\partial\tau,$$

d'après cette équation, en faisant varier τ à partir de τ', on obtient deux variations constamment égales, et φ_t et φ_s seraient toujours égaux; ce qui est absurde.

Lemme II. — D'après l'équation (7), φ est une quantité qui varie non-seulement avec τ, mais encore avec ρ. Or, supposons τ fixe et faisons croître ρ à partir de zéro, je dis que φ_s, qui sera d'abord infini, ira constamment en décroissant.

Considérons une valeur de u donnée par la formule (3) et qui satisfait par conséquent à l'équation

$$(8) \qquad \frac{d^2u}{dr^2}r^2 + \frac{du}{dr}r + \frac{d^2u}{d\beta^2} = \frac{-\varphi r^2}{(1 - 2\tau r\cos\beta + \tau^2 r^2)^2}u;$$

de plus, u ou φ est choisi de manière que u s'annule pour $r = \rho$. Si on suppose que ρ reçoive une très-petite variation, la quantité φ qui se trouve dans u subira elle-même une très-petite variation indépendante de β. Or, inversement, nous pouvons supposer que φ subisse une très-petite variation et chercher l'accroissement de ρ, qui sera indépendant de β.

u se changera alors en $u_1 = u + \delta u$ donné par l'équation

$$(9) \qquad \frac{d^2u_1}{dr^2}r^2 + \frac{du_1}{dr}r + \frac{d^2u_1}{d\beta^2} = \frac{-(\varphi + \delta\varphi)r^2}{(1 - 2\tau r\cos\beta + \tau^2 r^2)^2}u_1;$$

on a d'abord

$$u = 0 \text{ pour } r = \rho,$$

et puisqu'on donne à φ l'accroissement $\delta\varphi$, u_1 n'est nul qu'autant qu'on accroît ρ de

$$\delta\rho = -\frac{du}{d\varphi}\delta\varphi : \frac{du}{dr},$$

quantité indépendante de β; elle est de même signe que

$$-\frac{du}{d\varphi}\frac{du}{dr},$$

dont le signe est par conséquent le même quel que soit β; donc, pour connaître le sens de la variation de ρ, il suffit de chercher le signe de

$$-\int_0^{\pi} \frac{du}{d\varphi}\frac{du}{dr}d\beta \text{ pour } r = \rho.$$

Des équations (8) et (9), on tire

$$\left(u_1\frac{d^2u}{dr^2}-u\frac{d^2u_1}{dr^2}\right)r^2+\left(u_1\frac{du}{dr}-u\frac{du_1}{dr}\right)r+\left(u_1\frac{d^2u}{d\beta^2}-u\frac{d^2u_1}{d\beta^2}\right)$$
$$=\frac{r^2\delta\varphi}{(1-2\tau r\cos\beta+\tau^2r^2)^2}uu_1,$$

Multiplions les deux membres par $\frac{1}{r}drd\beta$, puis intégrons par rapport à r de o à ρ, et par rapport à β de o à 2π, et nous obtenons

$$\int_0^{2\pi}\left(ru_1\frac{du}{dr}-ru\frac{du_1}{dr}\right)_0^\rho d\beta+\int_0^\rho\left[\frac{u_1}{r}\frac{du}{d\beta}-\frac{u}{r}\frac{du_1}{d\beta}\right]_0^{2\pi}d\beta$$
$$=\delta\varphi\int_0^\rho\int_0^{2\pi}\frac{uu_1rdrd\beta}{(1-2\tau r\cos\beta+\tau^2r^2)^2},$$

u_1 est égal à $u+\frac{du}{d\varphi}\delta\varphi$, et d'après les conditions auxquelles u et u_1 doivent satisfaire, il reste

$$\rho\int_0^{2\pi}\left(\frac{du}{d\varphi}\frac{du}{d\beta}\right)_{r=\rho}d\beta=\delta\varphi\int_0^\rho\int_0^{2\pi}\frac{u^2rdrd\beta}{(1-2\tau r\cos\beta+\tau^2r^2)^2}.$$

Le second membre est essentiellement positif; donc, quand φ grandit, $\delta\rho$ est négatif et ρ diminue, et inversement quand on fait diminuer ρ, φ grandit; ce qu'il fallait démontrer.

Ces deux lemmes établis, construisons, r étant l'abscisse et y l'ordonnée, les courbes données par les équations

(10) $\quad y=\varphi_1(r),\quad y=\varphi_2(r),\ldots,\quad y=\varphi_s(r),\ldots,\quad y=\varphi_t(r),\ldots.$

φ_1, φ_2, ... étant la fonction (7) dans laquelle ρ est remplacé par r, et les deux quantités g et τ sont les mêmes dans toutes ces fonctions. Il résulte du second lemme que les ordonnées de chaque courbe vont en décroissant à mesure que l'abscisse r croît de zéro à l'infini, et il résulte du premier lemme que si t est $>s$, les ordonnées de la $t^{\text{ième}}$ courbe sont toujours plus grandes que celles de la $s^{\text{ième}}$.

D'après cela, supposons que la valeur de φ qui se trouve dans u

soit φ_t; prenons sur l'axe des r l'abscisse ρ et à son extrémité élevons l'ordonnée $\varphi_t(\rho)$ de la $t^{ième}$ courbe; soit M le point correspondant. Menons par le point M une parallèle à l'axe des abscisses; elle rencontrera les courbes (10) chacune en un point dont l'abscisse a les valeurs croissantes

$$\rho_1,\ \rho_2,\ldots,\ \rho_{t-1},\ \rho,\ \rho_{t+1},\ldots,$$

et u s'annulera, quel que soit β pour le nombre infini de valeurs $r=\rho_1$, $r=\rho_2,\ldots$, dont les $t-1$ premières sont plus petites que ρ.

En effet, φ pouvant être regardé, par exemple, comme ayant la valeur

$$\varphi=\varphi_s(\rho_s),$$

on déduit du théorème qui termine le n° **11**, que u s'annule pour $\rho=\rho_s$.

14. En multipliant u par le sinus ou le cosinus d'un arc proportionnel au temps, on aura le déplacement vibratoire d'une membrane pleine dont le contour fixe est un cercle et dont un élément de la surface (au point qui a pour coordonnée $r=0$) est maintenu horizontal. En outre, φ_t étant la valeur de φ qui entre dans u, on a t cercles nodaux

$$r=\rho_1,\quad r=\rho_2,\ldots,\quad r=\rho_{t-1},\quad r=\rho,$$

en comptant le cercle de contour.

Il résulte aussi de là que si une telle membrane est donnée et que le nombre entier g soit fixe, le son s'élèvera en même temps que le nombre des cercles nodaux augmentera d'une unité [*].

---

[*] En terminant le n° 28 du Mémoire de la membrane elliptique, nous avons dit que $\frac{dR}{dh}$ est $<4h$, parce que le nombre des lignes nodales elliptiques augmente quand la hauteur du son s'élève, le nombre des lignes nodales hyperboliques restant le même. Cette dernière assertion peut se démontrer par des raisonnements identiques à ceux du n° 13 actuel.

Il existe ensuite g autres lignes nodales rectangulaires sur ces i cercles. Pour le démontrer, remarquons d'abord que, si r est très-petit, l'expression de u se réduit à

$$(\mathrm{A}\sin g\beta + \mathrm{A}'\cos g\beta)\left(r^g - \frac{n^2}{g+1}r^{g+2}\right),$$

en négligeant r^{g+3} et si on l'égale à zéro, on voit que l'on a g lignes nodales passant par le point dont la coordonnée r est nulle et que chaque tangente menée en ce point à ces lignes fait avec la suivante un angle égal à $\frac{\pi}{g}$. Il est aisé de voir que ces lignes sont osculatrices aux cercles β; mais comme $\mathrm{A}\sin g\beta + \mathrm{A}'\cos g\beta$ cesse d'être en facteur dans l'expression de u, aussitôt que l'on a égard à r^{g+3}, il est évident que ces lignes ne peuvent se confondre avec ces cercles.

Enfin ces lignes nodales sont normales sur les cercles

$$r = \rho_1, \quad r = \rho_2, \ldots;$$

car nous pouvons limiter la membrane à deux de ces cercles, et d'après ce que nous avons vu au n° **7**, ces lignes doivent être orthogonales sur les deux contours.

Remarquons, en terminant, qu'il serait utile, pour compléter cette démonstration, de prouver que ces g lignes qui se croisent au point $r = 0$ ne peuvent se rencontrer en aucun autre point, et que chacune d'elles est rencontrée deux fois seulement par un des cercles compris dans l'équation

$$\alpha = \text{const.} \quad \text{ou} \quad r = \text{const.}$$

Distribution de la chaleur dans des cylindres lemniscatiques.

15. Nous allons maintenant nous occuper du mouvement de la température dans une autre famille de cylindres.

Si nous prenons l'axe des z suivant la direction des génératrices du cylindre, la température V est donnée par l'équation

$$\frac{d^2\mathrm{V}}{dx^2} + \frac{d^2\mathrm{V}}{dy^2} = k\frac{d\mathrm{V}}{dt},$$

et on a pour la solution simple

$$V = ue^{-\frac{m^2}{k}t},$$

$$(1) \qquad \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = -m^2u.$$

Aux coordonnées x et y, substituons les coordonnées α et β données par les formules

$$\alpha = \log \frac{c^2}{\sqrt{(x+c)^2+y^2}\sqrt{(x-c)^2+y^2}},$$

$$\beta = \text{arc tang}\frac{y}{x+c} + \text{arc tang}\frac{y}{x-c},$$

qui ont été considérées par M. Lamé dans la XIIIe leçon de ses *Coordonnées curvilignes*. $\alpha =$ const. désigne une famille de lemniscates, $\beta =$ const. une famille d'hyperboles orthogonale à la première. Par le changement de variables, l'équation (1) devient

$$(2) \qquad \frac{d^2u}{d\alpha^2} + \frac{d^2u}{d\beta^2} = -\frac{m^2c^2e^{-2\alpha}}{4\sqrt{1+2e^{-\alpha}\cos\beta + e^{-2\alpha}}}u.$$

Si p est un nombre négatif, $\alpha = p$ désigne une lemniscate formée d'une seule ligne fermée; si p est nul, $\alpha = 0$ désigne la lemniscate à laquelle on donne particulièrement ce nom et pour laquelle l'origine des coordonnées qui est un centre est aussi un point double. Enfin si p est positif, $\alpha = p$ représente deux lignes convexes fermées qui sont symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe des y; elles se réduisent à deux points $\alpha = \infty$.

Nous allons employer l'équation (2) à déterminer le mouvement de la température dans le corps renfermé entre deux cylindres indéfinis dont la base est $\alpha = p$, lorsque p est de même signe pour tous les deux.

16. Résolvons d'abord cette question, lorsque p est positif. Comme $\alpha = p$ représente deux lignes identiques, on a deux tuyaux de forme identique séparés l'un de l'autre, et il suffit de traiter celui qui est du côté des x positifs. Toutefois, pour faciliter les calculs, il conviendra

de rétablir par la pensée le second tuyau et d'imaginer, comme il est évidemment permis, que les températures sont les mêmes dans l'un et l'autre aux points symétriques (x, y) et $(-x, -y)$.

Si on se reporte à l'expression de β et qu'on se représente géométriquement les deux arcs qui y entrent, on verra que, par le changement de x et y en $-x$ et $-y$, ces deux arcs ne se permutent pas simplement, mais qu'ils prennent les valeurs résultant de cette transposition augmentées de π, en sorte que β s'accroît de 2π. Donc, par l'artifice employé, u devient une fonction qui reste invariable quand β augmente de 2π et que α reste le même.

Faisons dans l'équation (2)

$$\alpha = -\varepsilon + a,$$

et posons

$$e^{-a} = \tau, \quad \frac{c\tau}{2} = f,$$

en supposant a positif et par suite $\tau < 1$. Nous aurons

$$(3) \qquad \frac{d^2 u}{d\varepsilon^2} + \frac{d^2 u}{d\beta^2} = -m^2 f^2 e^{2\varepsilon}(1 + 2\tau e^{\varepsilon}\cos\beta + \tau^2 e^{2\varepsilon})^{-\frac{1}{2}} u.$$

Nous prenons pour la surface intérieure $\alpha = a$ ou $\varepsilon = 0$, et comme α sera plus petit pour la surface extérieure, elle est représentée par $\varepsilon = b$, b désignant une quantité positive.

L'équation des lemniscates est

$$(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2 x^2 = c^4 e^{-2\alpha} = c^4 \tau^2 e^{2\varepsilon},$$

et si on transporte l'origine des coordonnées au point $x = c$, $y = 0$, on reconnaîtra que si on fait tendre τ vers zéro en regardant $c\tau$ ou f comme fini, le système des lemniscates se change en cercles concentriques.

Si les surfaces rayonnent dans un milieu dont la température est zéro, on remarquera que l'élément de la normale à la surface α menée dans son intérieur a pour valeur

$$\frac{c}{2}(e^{4\alpha} + 2e^{3\alpha}\cos\beta + e^{2\alpha})^{-\frac{1}{4}} d\alpha = -\frac{c\tau}{2} e^{\varepsilon}(1 + 2\tau e^{\varepsilon}\cos\beta + \tau^2 e^{2\varepsilon})^{-\frac{1}{4}} d\varepsilon$$

et que si cet élément est extérieur à la surface, il change de signe. On en conclura que l'on a les deux équations aux limites en faisant successivement $\varepsilon = 0$ et $\varepsilon = b$ dans l'équation

$$-\frac{dv}{d\varepsilon}e^{-\varepsilon}(1 + 2\tau e^{\varepsilon}\cos\beta + \tau^2 e^{2\varepsilon})^{\frac{1}{2}} \pm flv = 0,$$

et prenant le signe + dans le premier cas et le signe − dans le second cas devant le dernier terme.

Cette question se résoudra ensuite d'une manière toute semblable à celle des cinq premiers numéros. Ainsi on posera

$$(4) \qquad u = \mathrm{U} + \mathrm{U}_1\varepsilon + \mathrm{U}_2\varepsilon^2 + \ldots;$$

on remarquera que l'on a

$$(1 + 2z\cos\beta + z^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \mathrm{Q}_1 z + \mathrm{Q}_2 z^2 + \ldots + \mathrm{Q}_n z^n + \ldots$$

avec

$$(-1)^n \frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\mathrm{Q}_n = \cos n\beta + \frac{n}{2n-1}\cos(n-2)\beta$$
$$+ \frac{3n(n-1)}{2(2n-1)(2n-3)}\cos(n-4)\beta + \ldots,$$

puis on en déduira le développement de

$$e^{2\varepsilon}(1 + 2\tau e^{\varepsilon}\cos\beta + \tau^2 e^{2\varepsilon})^{-\frac{1}{2}}$$

suivant les puissances de ε. On le portera, ainsi que le développement (4), dans l'équation (3), et en ayant égard à la condition pour la limite $\varepsilon = 0$

$$\mathrm{U}_1(1 + 2\tau\cos\beta + \tau^2)^{\frac{1}{2}} + fl\mathrm{U} = 0,$$

on trouvera que toutes les fonctions U, U_1, U_2, ..., s'expriment au moyen d'une seule U_1.

Pour obtenir U_1, on posera soit

$$\mathrm{U}_1 = \mathrm{A}\sin g\beta + \tau[a_1\sin(g+1)\beta + b_1\sin(g-1)\beta] + \ldots$$
$$+ \tau^{g-1}[a_{g-1}\sin(2g-1)\beta + b_{g-1}\sin\beta] + \tau^g a_g \sin 2g\beta$$
$$+ \tau^{g+1}a_{g+1}\sin(2g+1)\beta + \ldots,$$

soit une série semblable de cosinus, et on prendra pour g un nombre entier, puisque u a la période 2π. U, U_2, U_3,... seront de même forme que U_1, et la dernière condition de limite déterminera les coefficients $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$, ainsi que la quantité m.

17. Supposons que la surface intérieure disparaisse et que le corps soit un cylindre ovoïde lemniscatique plein dont la surface est entretenue à la température zéro. Posons

$$\alpha = \varepsilon + a, \quad e^{-\varepsilon} = r, \quad \frac{c\tau}{2} = f,$$

et l'équation (2) se change en celle-ci :

$$\frac{d^2u}{dr^2}r^2 + \frac{du}{dr}r + \frac{d^2u}{d\beta^2} = -m^2f^2r^2(1 + 2\tau r\cos\beta + \tau^2r^2)^{-\frac{1}{2}}u.$$

Nous emploierons pour u la série

$$u = Pr^g + P_1 r^{g+1} + P_2 r^{g+2} + \ldots,$$

dans laquelle g désigne un nombre entier, et nous substituerons son expression ainsi que le développement de

$$(1 + 2\tau r\cos\beta + \tau^2 r^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \tau r Q_1 + \tau^2 r^2 Q_2 + \ldots + \tau^n r^n Q_n + \ldots$$

dans l'équation précédente. Le calcul se continuera comme aux nos 8 et suivants, on sera conduit à des conclusions semblables et on pourra déterminer la constante m d'après la condition à la surface.

On pourrait aussi démontrer que si on fait vibrer une membrane dont le contour est une lemniscate ovoïde, il se forme deux systèmes de lignes nodales orthogonaux entre eux et que l'un de ces systèmes est composé de lemniscates dont l'équation est α ou $r =$ const.

18. Enfin considérons un tuyau dont les deux surfaces cylindriques ont pour bases des lemniscates dont le paramètre α est négatif. Posons

$$\alpha = -\varepsilon - a, \quad e^{-a} = \tau, \quad \frac{c\tau^{-\frac{1}{2}}}{2} = h.$$

l'équation (2) se change en la suivante

$$\frac{d^2u}{d\varepsilon^2} + \frac{d^2u}{d\beta^2} = -\frac{m^2h^2e^{\varepsilon}}{\sqrt{1+2\tau e^{-\varepsilon}\cos\beta + \tau^2e^{-2\varepsilon}}}\,u$$

Le contour intérieur sera représenté par $\varepsilon = 0$ et le contour extérieur par $\varepsilon = b$, b étant positif. Si ces deux surfaces sont entretenues à la température zéro, on y aura

$$u = 0;$$

si elles rayonnent dans un espace dont la température est zéro, on aura sur ces deux surfaces l'équation

$$-\frac{du}{d\varepsilon}e^{-\frac{\varepsilon}{2}}(1 + 2\tau e^{-\varepsilon}\cos\beta + \tau^2e^{-2\varepsilon})^{\frac{1}{4}} \pm lhu = 0,$$

en prenant pour le signe $\pm$ le signe $+$ sur la surface intérieure et le signe $-$ sur la surface extérieure. Enfin u doit satisfaire à la condition d'avoir par rapport à β la période 4π.

Nous avons vu jusqu'à présent qu'en faisant $\tau = 0$, on pouvait changer le système des cercles excentriques ou celui des lemniscates en cercles concentriques; on peut reconnaître qu'il en est encore de même ici, pourvu que l'on conçoive que $c\tau^{-\frac{1}{2}} = h$ reste fixe.

Les équations précédentes étant posées, la question se résout d'une manière toute semblable à celle du n° **16**, où l'on remplacera dans U g par $\frac{g}{2}$, g étant encore un nombre entier, parce que cette fonction doit avoir maintenant pour période 4π au lieu de 2π.

Il resterait à traiter le même problème pour le corps renfermé entre deux cylindres lemniscatiques, dont l'un a son paramètre α positif et l'autre ce paramètre négatif. Mais le centre de la section droite, qui a pour coordonnées $\alpha = 0$ et $\beta = \pi$, fait alors partie du corps, et en ce point le second membre de l'équation (2) devient infini; il est donc aisé de comprendre que la méthode de solution que nous avons précédemment employée cesse d'être applicable.

Mais il se présente alors une autre difficulté, et comme on la ren-

contre aussi pour l'équilibre de température de ce corps, c'est dans cette question beaucoup plus simple que nous allons l'examiner.

Réflexions sur l'équilibre de température des cylindres lemniscatiques.

19. Considérons l'équilibre de température du corps limité par deux cylindres α, en supposant toujours la température la même sur une parallèle aux génératrices, et comme la question ne peut présenter de difficulté qu'autant que les deux paramètres sont de signe contraire, examinons ce seul cas.

L'équation qui régit la température se réduit à

$$(1) \qquad \frac{d^2 v}{d\alpha^2} + \frac{d^2 v}{d\beta^2} = 0.$$

Les deux surfaces sont entretenues à des températures données qui varient d'une génératrice à l'autre. Mais comme l'état du corps est la superposition de deux états dont chacun proviendrait de la température donnée sur une des surfaces, l'autre surface étant à zéro, nous supposerons que la température est zéro sur la surface intérieure au paramètre positif $\alpha = \alpha''$, et qu'elle est égale à $f(\beta)$ sur la surface extérieure au paramètre négatif $\alpha = \alpha'$.

On a une solution de l'équation (1) qui s'annule pour $\alpha = \alpha''$ en posant

$$(2) \qquad V = \dot{\mathscr{E}}\left[\frac{n}{2}(\alpha'' - \alpha)\right]\left(A \sin\frac{n\beta}{2} + B\cos\frac{n\beta}{2}\right);$$

$\dot{\mathscr{E}}(u)$ désigne en général le sinus hyperbolique de u, et n est un nombre entier, afin que v possède par rapport à β la période 4π. Ensuite, pour satisfaire à la condition de la surface $\alpha = \alpha'$, on prend la somme d'une infinité de ces expressions en posant

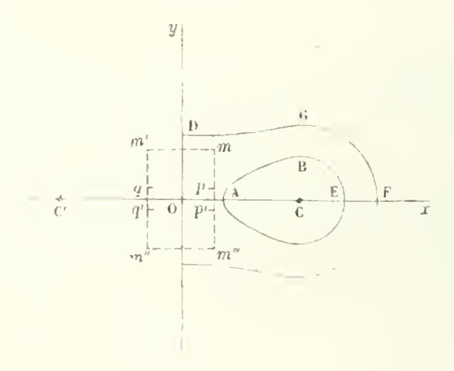
$$(3) \qquad V = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\dot{\mathscr{E}}\left[\frac{n}{2}(\alpha'' - \alpha)\right]}{\dot{\mathscr{E}}\left[\frac{n}{2}(\alpha'' - \alpha')\right]}\left(A_n \sin\frac{n\beta}{2} + B_n\cos\frac{n\beta}{2}\right),$$

et on détermine, comme on sait, les coefficients A_n et B_n d'après l'équation

$$(4) \qquad \sum\left(A_n \sin\frac{n\beta}{2} + B_n \cos\frac{n\beta}{2}\right) = f(\beta).$$

Telle semble être la solution cherchée; et cependant elle est inexacte, comme il est aisé de le reconnaître.

Désignons par C et C′ les deux points dont le produit des distances aux points d'une des lemniscates est constant et qui ont les mêmes coordonnées, savoir : $\alpha = \infty$, $\beta = \pi$. Considérons deux points p et p' symétriques par rapport à la droite qui joint les points C et C′, très-voisins de la partie de cette droite comprise entre C et C′, et supposons, de plus, ces deux points situés entre les deux lemniscates de contour.



Pour ces deux points, la coordonnée α est la même et la coordonnée β est $\pi - \varepsilon$ pour p et $3\pi + \varepsilon$ pour p', ε désignant une quantité très-petite, et il résulte de la formule (3) que V aurait en général une valeur fort différente pour les deux points p et p', tandis qu'elles doivent évidemment différer infiniment peu. Si on considère au contraire les deux points p et q très-rapprochés de la droite CC′ qui ont la même coordonnée α et dont la coordonnée β est $\pi - \varepsilon$ pour l'un et $\pi + \varepsilon$ pour l'autre et diffère infiniment peu, la formule (3) donnerait pour la température de ces deux points des valeurs qui différeraient infiniment peu, bien qu'ils soient à une distance finie, et cela quelle

que soit la température $f(\beta)$ de la surface extérieure; ce qui est impossible.

20. Il reste à savoir d'où vient cette contradiction, après que nous avons satisfait à l'équation (1), aux conditions aux limites et à la condition voulue de périodicité.

Or, si l'on exprime l'équilibre de température d'un cylindre élémentaire dont la section droite est comprise entre deux courbes α et deux courbes β infiniment voisines, on est bien conduit en général à l'équation (1); mais si cet élément est situé sur la droite CC′ entre les points C et C′, en sorte que cette droite remplace l'une des courbes β, la coordonnée β varie brusquement pour des points infiniment voisins et l'équation n'a plus lieu sur CC′. Toutefois cette équation disparaissant, il faut qu'une autre condition la remplace. Or, sur la droite CC′, la coordonnée β est à volonté π ou 3π; donc la condition est que la fonction V ait la même valeur pour toute valeur positive de α comprise de 0 à α'', soit qu'on fasse $\beta = \pi$ ou $\beta = 3\pi$.

Cherchons maintenant à obtenir la véritable solution. Remarquons d'abord qu'il ne se présente plus de difficulté dans le cas où la température $f(\beta)$ donnée sur la surface extérieure est symétrique par rapport au centre, et où l'on a

$$f(\beta + 2\pi) = f(\beta).$$

Dans ce cas, la série (4) qui exprime $f(\beta)$ ne conserve que les termes pour lesquels n est pair, et dès que l'équation (3) ne renferme que des valeurs paires de n, les contradictions que nous avons signalées tout à l'heure disparaissent.

Dans le cas le plus général, $f(\beta)$ est une fonction qui a 4π pour période, de sorte que l'on a

$$f(\beta + 4\pi) = f(\beta),$$

et en posant

$$f(\beta) = \frac{f(\beta) + f(\beta + 2\pi)}{2} + \frac{f(\beta) - f(\beta + 2\pi)}{2},$$

on décompose $f(\beta)$ en deux parties $f_1(\beta)$ et $f_2(\beta)$, dont l'une reste invariable quand on remplace β par $\beta + 2\pi$, et dont l'autre change

seulement de signe. Donc l'état d'équilibre de température du corps est la superposition de deux états, dont l'un symétrique par rapport au centre correspond à $f_1(\beta)$ et vient d'être examiné, et dont l'autre correspondant à $f_2(\beta)$ donne des températures égales et de signe contraire pour deux points symétriques par rapport au centre.

Ainsi cherchons la température V d'un corps en supposant qu'elle soit égale et de signe contraire pour deux points m et m'' symétriques par rapport au centre.

Nous pouvons considérer cet état de température comme la superposition de deux états V_1 et V_2 ainsi définis.

Soient m un point quelconque dans l'angle $y\mathrm{O}x$, et m', m'', m''' les trois points dont les coordonnées rectilignes ont la même valeur absolue dans les trois autres angles de coordonnées. 1° V_1 est une fonction qui a la même valeur en m et m', des valeurs égales et de signe contraire en m et m'', et en m et m'''; 2° V_2 est une fonction qui a des valeurs égales et de signe contraire en m et m' ou en m et m'', et la même valeur en m et m'''.

En effet, désignons V par $F(\alpha, \beta)$; cette fonction satisfait par hypothèse à l'équation

$$(5) \qquad F(\alpha, \beta + 2\pi) = -F(\alpha, \beta)$$

quel que soit β; partageons-la en deux parties de cette sorte :

$$(6) \qquad F(\alpha, \beta) = \frac{F(\alpha, \beta) + F(\alpha, 2\pi - \beta)}{2} + \frac{F(\alpha, \beta) - F(\alpha, 2\pi - \beta)}{2}.$$

La première partie remplit les conditions de la fonction V_1, et la seconde celles de la fonction V_2, comme il résulte de (5), en observant que si b est la coordonnée β de m, celles de m', m'', m''' sont respectivement $2\pi - b$, $2\pi + b$, $4\pi - b$.

D'ailleurs pour examiner ces deux états de température, il est clair qu'il faudra partager la température $f(\beta)$ relative à la surface extérieure en deux parties, d'après la formule (6).

21. L'avantage que nous obtenons à considérer les deux états V_1 et V_2 résulte de ce que, pour les étudier, il suffit de s'occuper du

quart du corps, et que l'équation (1) y est exacte dans toute son étendue.

En effet, considérons le quart du corps OABEFGD. La température V_1 est donnée sur ABE et DGF qui sont des parties des surfaces $\alpha = \alpha''$ et $\alpha = \alpha'$; elle est nulle sur OA et EF, et $\frac{dV_1}{d\beta}$ est nul sur OD, en sorte que cette surface peut être regardée comme imperméable à la chaleur. Ces conditions aux limites déterminent évidemment la température du corps OABEFGD.

Dans l'état V_2, cette température est nulle sur OD, tandis que OA et EF peuvent être supposés imperméables à la chaleur.

Cherchons la température V_1. Désignons par $\varphi(\alpha)$ la température inconnue le long de OD, on a

$$V_1 = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \frac{\mathcal{E}[n(\alpha''-\alpha)]}{\mathcal{E}[n(\alpha''-\alpha')]} \sin n\beta$$
$$+ \sum_{m=1}^{m=\infty} B_m \frac{\mathcal{E}\left(\frac{m\pi}{\alpha''-\alpha'}\beta\right)}{\mathcal{E}\left(\frac{m\pi^2}{\alpha''-\alpha'}\right)} \sin\left[\frac{m\pi}{\alpha''-\alpha'}(\alpha-\alpha')\right],$$

n et m désignant des nombres entiers auxquels se rapporte le signe sommatoire $\sum$ et les coefficients A et B ayant pour valeurs

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\beta)\sin n\beta\, d\beta, \quad B_m = \frac{2}{\alpha''-\alpha'}\int_0^{\alpha'} \varphi(\alpha)\sin m(\alpha-\alpha')\, d\alpha.$$

Donc les coefficients A_n sont connus, tandis que les coefficients B_m sont à déterminer. Comme $\frac{dV}{d\beta}$ est nul pour $\beta = \pi$ entre $\alpha = 0$ et $\alpha = \alpha'$, on a entre ces limites

$$(7)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{n=\infty} B_m \frac{m\pi}{\alpha''-\alpha'} \frac{E\left(\frac{m\pi^2}{\alpha''-\alpha'}\right)}{\mathcal{E}\left(\frac{m\pi^2}{\alpha''-\alpha'}\right)} \sin\frac{m\pi(\alpha-\alpha')}{\alpha''-\alpha'} \\ \displaystyle\quad = -\sum^{n=\infty} A_n \frac{\mathcal{E}[n(\alpha''-\alpha)]}{\mathcal{E}[n(\alpha''-\alpha')]} n\cos n\pi. \end{cases}$$

E désignant un cosinus hyperbolique; le second membre de cette équation est connu, et comme V_1 est nul sur OA, on a

$$(8) \qquad \sum B_m \sin m(\alpha - \alpha') = 0,$$

entre $\alpha = 0$ et $\alpha = \alpha''$. La détermination des coefficients B au moyen de ces deux équations offre de la difficulté; mais pour résoudre la question par approximation, on pourra réduire ces deux séries à leurs g premiers termes, g étant un nombre suffisamment grand; puis diviser la ligne AOD en $g + 1$ parties égales, et on supposera que les points de division situés sur OD satisfont à la première équation, et les points de division sur OA à la seconde; il en résultera g équations pour déterminer un même nombre de coefficients.

Le calcul de V_2 se ferait d'une manière toute semblable.

Le principal intérêt de ces dernières considérations est de prouver que lorsqu'on transformera en coordonnées curvilignes les équations aux différences partielles qui régissent l'équilibre et le mouvement de la température des corps ou leurs mouvements vibratoires, ces équations transformées pourront cesser d'avoir lieu sur certaines lignes ou certaines surfaces de l'intérieur de ces corps, et que si on les intégrait sans y prendre attention, on arriverait à des formules tout à fait inexactes. Or, ces remarques n'avaient pas encore été faites.

MÉMOIRE SUR LES LIGNES SPIRIQUES
(SUITE);

Par M. DE LA GOURNERIE.

CHAPITRE II.

FOYERS.

Nombre des foyers. — Foyers multiples.

99. Nous avons vu que la spirique était de la huitième classe. Quatre des huit tangentes qu'on peut lui mener d'un point circulaire à l'infini, sont représentées par deux asymptotes, et, par suite, elle possède quatre foyers quadruples, seize doubles et seize simples. Les foyers réels sont au nombre de six, deux quadruples et quatre simples. J'appellerai les premiers *foyers singuliers* (n° **48**), et les autres *foyers ordinaires*.

La détermination des foyers singuliers ne présente aucune difficulté. On trouve que ces points coïncident avec les foyers communs aux trois coniques déférentes. Ce résultat est une conséquence immédiate du théorème établi au n° **48**.

Considérations générales sur les foyers simples.

100. Les quatre intersections d'une conique déférente avec le cercle d'inversion qui lui correspond sont des foyers ordinaires (n° **47**). Nous trouvons ainsi immédiatement douze foyers répartis en trois groupes. Quatre des intersections réciproques des tangentes qu'on peut mener à la spirique des points circulaires sont d'ailleurs sur son axe; elles complètent le nombre des seize foyers simples.

Il est nécessaire de déterminer les foyers simples pour connaître les situations relatives des déférentes et des cercles d'inversion, et voir quelle est la forme de la spirique.

101. Soient u_1, u_2, u_3, u_4 les abscisses des foyers sur l'axe. Les droites dirigées de ces points aux points circulaires à l'infini se coupent aux autres foyers. Les coordonnées des foyers de l'un des groupes sont, par conséquent,

$$(1)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{u_1 + u_2}{2}, \\ y = \pm \dfrac{u_1 - u_2}{2}\sqrt{-1}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{u_3 + u_4}{2}, \\ y = \pm \dfrac{u_3 - u_4}{2}\sqrt{-1}. \end{cases}$$

Si u_1 et u_2 sont des longueurs imaginaires conjuguées, les foyers qui ont pour coordonnées

$$\frac{u_1 + u_2}{2}, \quad \pm \frac{u_1 - u_2}{2}\sqrt{-1}$$

seront réels. D'où il suit que *les foyers réels hors de l'axe sont les points figuratifs des foyers imaginaires sur l'axe* (nº **15**, 3º). L'étude des foyers sur l'axe nous fera donc connaître toutes dispositions que peuvent prendre les foyers réels de la spirique.

102. Les quatre foyers déterminés par l'équation (1) sont sur un cercle d'inversion; mais, d'après les propositions démontrées aux nºs **21-24**, les points figuratifs de quatre points imaginaires en ligne droite sont sur le cercle qui a pour diamètre les points doubles de l'involution quadratique déterminée par les deux couples de points conjugués imaginaires. Les sommets et les foyers sur l'axe ont donc les mêmes centres d'inversion.

Cette proposition est une conséquence du théorème du nº **47**, mais comme elle a beaucoup d'importance, je l'établirai plus loin directement.

Foyers sur l'axe.

103. Je vais maintenant me proposer de déterminer les foyers que la spirique possède sur son axe. Considérons la courbe représentée par l'équation

$$(2)\qquad (x^2 + y^2)^2 - 4px(x^2 + y^2) + qx^2 + ry^2 + sx + t = 0.$$

Si u est l'abscisse d'un foyer sur l'axe, les deux droites

$$x - u \pm y\sqrt{-1} = 0$$

seront tangentes à la courbe, et, par suite, l'équation (2) pourra être mise sous la forme

$$(3)\qquad [(x-u)^2 + y^2](x^2 + y^2 + \alpha x + \beta) + (\gamma x + \delta)^2 = 0.$$

Égalant les coefficients des termes semblables dans les équations (2) et (3) développées, j'obtiens

$$2u - \alpha = 4p,\quad u^2 - 2\alpha u + \beta + \gamma^2 = q,$$
$$u^2 + \beta = r,\quad \alpha u^2 - 2\beta u + 2\gamma\delta = s,$$
$$\beta u^2 + \delta^2 = t.$$

L'élimination de α, β, γ et δ entre ces cinq équations donnera la valeur de u.

Faisant d'abord disparaître α et β, on trouve

$$\gamma^2 = 4u^2 - 8pu + q - r,\quad \gamma\delta = -2u^3 + 2pu^2 + ru + \frac{s}{2},$$
$$\delta^2 = u^4 - ru^2 + t.$$

Il est très-facile d'éliminer γ et δ. On a, après quelques réductions,

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l}(q - r - 4p^2)u^4 + 2(s + 2pr)u^3 \\ \quad + (4t - 2ps - qr)u^2 - (sr + 8pt)u + (q - r)t - \dfrac{s^2}{4} = 0.\end{array}\right.$$

Nous trouvons pour u quatre valeurs, comme cela devait être.

104. D'après cette équation, le centre des moyennes distances des foyers a une abscisse égale à la valeur trouvée pour e au n° **65**. Il résulte de là que *le point équatorial est le centre des moyennes distances des foyers sur l'axe.*

Quand le point équatorial s'éloigne à l'infini, un des foyers disparaît avec lui. On voit ainsi que la cartésienne n'a sur son axe que trois foyers à distance finie.

105. Il nous sera utile d'avoir l'équation aux foyers en fonction des coefficients de l'équation aux sommets, et de l'abscisse du point équatorial.

L'équation (5) du n° **65** donne

$$(5) \qquad r = \frac{2(q - 4p^2)e + s}{2(e - p)}.$$

En portant cette valeur dans (4), on trouve, après quelques réductions,

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\Big[(8p^3 - 2pq - s)u^4 + (4p^2 s - 8pt - qs)u^2 + (16p^2 t - s^2)u \\ &\qquad\qquad + \left(\frac{ps^2}{2} - st - 2pqt\right)\Big] \\ &- 4e\Big[(8p^3 - 2pq - s)u^3 + \left(ps - 2p^2 q - 2t + \frac{q^2}{2}\right)u^2 \\ &\qquad\qquad + \left(4pt - 2p^2 s + \frac{qs}{2}\right)u + \left(\frac{s^2}{8} - 2p^2 t\right)\Big] = 0. \end{aligned} \right.$$

Si la spirique se déforme de manière que ses sommets soient fixes et le point équatorial mobile, les foyers sur l'axe formeront une involution.

106. Quand e est infini, les valeurs de u sont égales à celles de λ données par l'équation (6) du n° **5**, et, par suite, les centres d'inversion des foyers sont également les centres d'inversion des sommets.

Si l'on suppose e égal à p, l'équation (6) se réduit à

$$u^4 - 4pu^3 + qu^2 + su + t = 0,$$

et, par suite, les foyers coïncident avec les sommets. Nous trouvons ainsi d'une nouvelle manière le théorème établi au n° **102**. On peut l'énoncer comme il suit :

Les quatre sommets et les quatre foyers que la spirique possède sur son axe forment deux groupes d'une involution spéciale du quatrième ordre, dont les centres d'inversion sont aux points où les axes des tores qui passent par la spirique rencontrent son axe de symétrie.

Il résulte de là qu'*un groupe de foyers hors de l'axe jouit des pro-*

priétés d'un groupe de points figuratifs d'une involution speciale complète (nos 21-24).

107. Deux cercles quelconques forment une spirique dans laquelle la ligne des centres est l'axe de symétrie (n° 66). L'intersection de la sécante commune des cercles avec la ligne de leurs centres est le point équatorial de la spirique, et aussi le point central O' de l'involution quadratique déterminée par les deux couples de points a_1 et a_2, a_3 et a_4 où les cercles rencontrent l'axe. Les foyers ordinaires se confondent deux à deux aux points doubles e' et f' de l'involution composante dont O' est le centre. Les foyers singuliers réels sont les centres des cercles qui forment la spirique, c'est-à-dire les milieux des segments $a_1 a_2$ et $a_3 a_4$.

Deux des déférentes sont les coniques qui ont leurs foyers en ces points milieux a_{12} et a_{34}, et qui passent par les points d'intersection des deux cercles. La troisième déférente se réduit aux points a_{12} et a_{34} (n° 52).

Les cercles d'inversion qui correspondent aux deux premières déférentes touchent ces courbes aux points d'intersection des deux cercles.

Si l'on suppose les sommets fixes et le point équatorial mobile, on a un faisceau de spiriques qui comprend trois systèmes de deux cercles. Dans chacun d'eux le point équatorial coïncide avec un centre d'inversion.

108. Il est facile d'avoir l'équation d'une spirique quand on connaît les positions des centres d'inversion, du centre G des moyennes distances, et du point équatorial.

L'origine étant un point quelconque de l'axe, j'appelle e et p les abscisses du point équatorial et du centre G, et je regarde comme connus les coefficients de l'équation

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \tag{7}$$

dont les racines sont les abscisses des centres d'inversion.

Les abscisses des sommets sont données par l'équation (8) du n° 4,

qui, ordonnée par rapport à x, devient

$$x^4 - 4px^3 - 2\frac{2bp+c}{a}x^2 - 4\frac{cp+2d}{a}x - \frac{4adp-(c^2-4bd)}{a^2} = 0.$$

On a donc

$$q = -2\frac{2bp+c}{a},\quad s = -4\frac{cp+2d}{a},\quad t = -\frac{4adp-(c^2-4bd)}{a^2}.$$

J'obtiens r en portant ces valeurs dans l'expression (5) du n° **65** :

$$r = 2\frac{2aep^2+(2be+c)p+(ce+2d)}{a(p-e)}.$$

L'équation cherchée est, par conséquent,

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &(x^2+y^2)^2 - 4px(x^2+y^2) - 2\frac{2bp+c}{a}x^2 \\ &\quad + 2\frac{2aep^2+(2be+c)p+(ce+2d)}{a(p-e)}y^2 \\ &\qquad - 4\frac{cp+2d}{a}x - \frac{4adp-(c^2-4bd)}{a^2} = 0. \end{aligned}\right.$$

Spiriques homofocales [*].

109. Si l'on donne les quatre foyers sur l'axe, ou, plus généralement, quatre foyers situés sur un même cercle, l'équatoriale et les cercles d'inversion seront déterminés, mais les sommets pourront être placés sur l'un quelconque des groupes de l'involution spéciale à laquelle les foyers appartiennent directement ou comme points figuratifs. Nous aurons ainsi un système de spiriques homofocales, c'est-à-dire possédant les mêmes foyers ordinaires.

Pour que l'équation (8) représente un système de spiriques homo-

---

[*] Plusieurs des résultats contenus dans ce paragraphe ont déjà été établis pour les courbes du quatrième ordre qui ont deux points doubles à l'infini sur un cercle, mais je présente la théorie des spiriques homofocales en la rattachant aux propriétés de l'involution spéciale, ce qui est utile pour que les propositions puissent plus tard servir facilement dans la discussion générale.

focales, il suffit d'y considérer p comme variable. Ce paramètre s'élève à la seconde puissance lorsqu'on fait disparaître les dénominateurs, et, par suite, *il passe par tout point du plan deux spiriques homofocales à une spirique donnée.*

110. Nous avons vu au n° **95** que quand les points E et G coïncident, l'équation de la spirique donne deux fois l'axe de symétrie et deux fois la droite de l'infini. On peut le reconnaître à l'aide de l'équation (8) en y supposant p égal à e. Ce système de droites satisfait à la définition de la spirique, mais par lui-même il n'est pas de la même classe que cette courbe.

p et e étant égaux, les foyers coïncident avec les sommets. Les droites perpendiculaires à l'axe menées par les sommets d'une spirique lui sont tangentes. Il y a donc, dans le cas qui nous occupe, deux tangentes distinctes à chaque sommet, d'abord l'axe qui est la spirique elle-même, puis sa perpendiculaire. Il résulte de là que toute droite passant a un sommet est une tangente. En résumé, la courbe se transforme en un système du genre de ceux que M. Chasles a appelés *êtres géométriques* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 22 avril 1867). Elle est représentée par deux fois la ligne de l'infini, deux fois l'axe de symétrie et quatre points situés sur cet axe. Ces points sont à la fois foyers et sommets; on doit regarder comme tangentes toutes les droites qui y passent.

Cette transformation est analogue à celle qui a lieu pour les coniques quand leurs foyers réels coïncident respectivement avec deux sommets. Le contact avec la courbe du cercle de rayon nul qui a son centre au foyer cesse alors d'être idéal.

Les résultats auxquels nous venons de parvenir ont déjà été obtenus au n° **87** par des considérations différentes.

111. Quand le centre G des moyennes distances est à l'infini, l'équation (8) devient

$$ax(x^2+y^2)+bx^2-eay^2+cx+d=0. \tag{9}$$

La spirique se décompose en une cubique circulaire et la droite de l'infini.

Tout système de spiriques homofocales contient une cubique circulaire. L'asymptote réelle de cette courbe est l'équatoriale commune des spiriques.

Je consacrerai un Chapitre à l'étude de la cubique circulaire douée d'un axe.

112. Je vais maintenant supposer que le centre des moyennes distances coïncide avec le centre d'inversion O'. Je prends ce point pour origine, alors p et d sont nuls, et l'équation (8) devient

$$(10) \qquad (x^2+y^2)^2 - 2\frac{c}{a}x^2 - 2\frac{c}{a}y^2 + \frac{c^2}{a^2} = 0.$$

Elle représente deux fois un cercle qui a son centre en O' et qui est nécessairement le cercle $e'f'$, car le point G étant en O', les sommets doivent être réunis deux à deux aux points e' et f'.

Les trois cercles d'inversion d'un système de spiriques homofocales font partie de ce système.

J'aurais à présenter ici des observations analogues à celles du n° **110**; je me borne à dire que la spirique n'est pas remplacée par un cercle double, mais par un être géométrique composé de deux arcs doubles limités aux foyers. M. Crofton a déjà signalé cette circonstance à la Société Mathématique de Londres dans sa séance du 23 mai 1867.

Si deux des foyers situés sur le cercle étaient imaginaires, la spirique serait représentée par un seul arc double réel limité aux deux autres foyers.

113. Il est bien connu que, dans un système de courbes homofocales du quatrième ordre ayant deux points à l'infini sur un cercle, les rencontres se font à angle droit [*]. Je vais donner, de ce théorème, une démonstration purement géométrique. Je ne considérerai que des spiriques.

Soient un cercle C et sur ce cercle quatre foyers communs à un

[*] *Voir* l'article déjà cité de M. Bertrand.

système de spiriques. Je prends sur le plan un point quelconque M, et je détermine le point M′ qui est son réciproque par rapport au cercle C. J'appelle V l'axe radical commun au cercle C et aux cercles de rayon nul qui ont respectivement leurs centres en M et en M′.

On obtient le système général des spiriques qui ont pour foyers les quatre points donnés sur le cercle, en prenant pour déférentes les coniques qui passent par ces points; deux d'entre elles touchent V en des points E et F. Les cercles qui ont pour centre E et F, et qui sont orthogonaux à C, touchent en M et en M′ chacun une spirique du système (nº **40**). Il faut prouver que ces cercles sont à angle droit.

Les coniques coupent V en des couples de points qui forment une involution dont E et F sont les points doubles; ces points sont donc conjugués par rapport au cercle C qui est une des coniques. Si de E comme centre, on décrit un cercle orthogonal à C, la sécante commune à ce cercle et à C passera par F, et ce point sera le centre d'un troisième cercle qui coupera ceux-ci à angles droits Le théorème est donc démontré.

Propriétés vectoriales des foyers.

114. M. Salmon a établi (*Higher plane curves*) que, dans les lignes du quatrième ordre qui ont deux points doubles à l'infini sur un cercle, il existe une relation linéaire et homogène entre les distances d'un point quelconque de la courbe à trois des quatre foyers situés sur un même cercle. Il importe, par suite, de savoir dans quel cas les foyers réels d'une spirique appartiennent à un seul cercle.

Si les sommets sur l'axe sont tous réels ou tous imaginaires, les trois centres d'inversion sont réels et les quatre foyers réels se trouvent sur l'axe ou sur un même cercle (nº **15**).

Quand deux des sommets sur l'axe sont imaginaires, deux centres d'inversion sont également imaginaires. Deux des foyers réels sont alors sur l'axe; les autres se trouvent sur le seul cercle d'inversion qui soit réel (nº **16**).

Lorsque deux sommets sur l'axe coïncident en un point O_2, deux des centres d'inversion sont en O_2, et le troisième est nécessairement un point réel O'''. Deux foyers réels sont en O_2; les deux autres se trouvent

sur le cercle d'inversion dont le centre est O''' ou sur l'axe, suivant que le point équatorial est ou n'est pas sur le segment $O_2 O'''$ (nº **17**).

Quand la spirique a un rebroussement, le point de rebroussement représente trois foyers; le quatrième foyer est sur l'axe. Dans ce cas les propriétés vectoriales disparaissent.

115. La cartésienne a son point équatorial et un de ses foyers à l'infini; ses autres foyers sur l'axe coïncident avec les centres d'inversion. Si la courbe n'a sur l'axe que deux sommets réels, deux centres d'inversion seront imaginaires et leurs points figuratifs seront des foyers réels. Les propriétés vectoriales par lesquelles on a coutume de définir l'ovale de Descartes n'existent plus dans ce cas, ou du moins on ne les retrouve qu'en considérant des points et des coefficients imaginaires.

Transformation d'une spirique.

116. Si l'on fait éprouver à une spirique une transformation par rayons vecteurs réciproques, on aura une ligne du quatrième ordre ayant deux points doubles à l'infini sur un cercle. Les foyers ordinaires des deux courbes se correspondront, car ce sont les centres de cercles de rayon nul et bitangents.

Lorsque le pôle coïncide avec un foyer ordinaire, la transformée est une nouvelle spirique ayant un foyer à l'infini, c'est-à-dire un ovale de Descartes. Ce résultat a été signalé par M. Mannheim (*Journal de l'École Polytechnique*, XLe cahier, p. 74), et par M. Darboux (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1864, p. 162).

Quand le pôle de transformation est à un sommet, on a une cubique circulaire douée d'un axe; s'il se trouve à l'intersection de deux cercles d'inversion, on obtient une spirique à centre.

CHAPITRE III.

ESSAI D'UNE CLASSIFICATION DES SPIRIQUES.

Observations générales.

117. Les théorèmes que j'ai établis dans les Chapitres précédents permettent de discuter les formes et les propriétés spéciales des spiriques. Je me bornerai à énoncer les résultats pour les différents genres; je réserverai d'ailleurs pour des Chapitres spéciaux trois variétés sur lesquelles je devrai présenter quelques considérations spéciales : ce sont, la cubique circulaire douée d'un axe, la spirique à point double et la spirique à centre. J'ai déjà dit (nº **98**) que les formules précédemment obtenues ne conviennent pas toutes à la spirique qui a un centre; il faut aussi prendre quelques précautions quand on veut les appliquer aux deux autres variétés que je viens d'indiquer.

Les tangentes doubles perpendiculaires à l'axe étant toujours réelles quand les tores d'un couple sont réels (nº **95**), je ne m'occuperai d'elles que dans le cas où tous les tores seraient imaginaires.

La forme d'une spirique est facilement déterminée quand on connaît le genre de l'une des coniques déférentes, et sa position par rapport au cercle d'inversion. Il est essentiel de savoir en combien de points la conique rencontre le cercle; ces points sont des foyers ordinaires de la spirique, et nous avons vu dans le Chapitre précédent qu'il est très-aisé de les obtenir lorsque les centres d'inversion et le point équatorial sont donnés.

§ I. — *Les quatre sommets sur l'axe sont réels et distincts.*

118. Les trois centres d'inversion sont réels, distincts et situés d'un même côté du centre G des moyennes distances. Les prenant dans l'ordre où ils sont rangés à partir de ce centre, je les appelle O′, O″, O‴. Le cercle d'inversion O″ est imaginaire (nº **15**).

Suivant que le point équatorial est en dehors du segment GO″ ou

sur ce segment, on a deux ovales dont un contient l'autre, ou deux ovales extérieurs l'un à l'autre. Il y a ainsi lieu de distinguer deux genres différents. Lorsque le point équatorial est en O″ ou en G, on a deux formes de transition, qui doivent être considérées comme des espèces distinctes.

Premier genre. — Deux ovales dont un contient l'autre.

119. Indépendamment des sommets réels sur l'axe, chaque ovale en possède deux sur le cercle O‴. Tous les autres sommets sont imaginaires.

On est conduit à reconnaître cinq espèces, suivant la position du point équatorial.

Première espèce. — Le point équatorial est du côté du centre G opposé à celui où sont les centres d'inversion.

Les six tores sont réels; les foyers singuliers se trouvent en dehors de l'axe de symétrie. Les foyers ordinaires sont sur l'axe.

Les coniques déférentes sont des ellipses. Le cercle d'inversion O′ est dans l'intérieur de la conique Γ′; le cercle O‴ se trouve à l'extérieur de Γ‴.

Deuxième espèce. — Quand le point équatorial est à l'infini, la courbe est une cartésienne.

Troisième espèce. — Le point équatorial est au delà du centre O‴.

Les six tores sont imaginaires, et les tangentes doubles perpendiculaires à l'axe réelles.

Les déférentes sont des ellipses dont les foyers se trouvent sur l'axe de symétrie, et qui ont, par rapport aux cercles d'inversion, les mêmes positions relatives que dans la première espèce.

Les foyers ordinaires sont sur l'axe.

Quatrième espèce. — Le point équatorial coïncide avec le centre O‴.

La spirique est remplacée par le système de deux cercles dont un contient l'autre (nº **108**).

Cinquième espèce. — Le point équatorial est entre O″ et O‴.

Les tores sont imaginaires.

Les coniques déférentes ont leurs foyers sur l'axe de symétrie. La première Γ′ est une ellipse qui contient le cercle O′; la seconde Γ″ est

également une ellipse. Pour la troisième Γ‴, on trouve une hyperbole dont une branche rencontre en quatre points le cercle O‴.

Les quatre foyers ordinaires sont sur ce cercle.

120. *Constructions pour distinguer les cinq espèces.* — Une spirique composée de deux ovales dont un contient l'autre étant tracée, et l'axe de symétrie étant connu, on déterminera sans difficulté les points O′, O″, O‴, G, et les sommets que la déférente Γ′ possède sur l'axe de symétrie.

Une perpendiculaire à cet axe menée par O′ rencontrera la spirique en quatre points réels, et on verra immédiatement comment ils doivent être réunis en couples par rapport au cercle d'inversion O′. Employant alors la construction exposée à la fin du nº **40**, on obtiendra les droites parallèles à l'axe de symétrie qui touchent la déférente Γ′ : elles font connaître les quatre sommets de cette ellipse. On déterminera ensuite la position du point équatorial par un tracé facile déduit de la formule (20) du nº **85**.

On peut appuyer la construction sur le point O″, car la perpendiculaire à l'axe élevée par ce centre rencontrera toujours la courbe en quatre points réels.

Le point équatorial étant connu, on saura à quelle espèce appartient la courbe.

Deuxième genre. — Deux ovales extérieurs l'un à l'autre et traversés par l'axe de symétrie.

121. Les six tores sont imaginaires. Les foyers singuliers de la spirique sont sur l'axe de symétrie.

Chaque ovale possède quatre sommets, deux sur l'axe et deux sur le cercle O′.

Première espèce. — Le point équatorial est entre O′ et O″.

Les deux tangentes doubles perpendiculaires à l'axe sont réelles.

La première déférente est une ellipse qui coupe le cercle O′ en quatre points; les deux autres sont des hyperboles. La troisième Γ‴ contient le cercle d'inversion O‴ dans la concavité d'une de ses branches.

Deuxième espèce. — Lorsque le point équatorial est en O′, la spirique est formée de deux cercles extérieurs l'un à l'autre.

Troisième espèce. — Le point équatorial est entre G et O′.

Les tangentes doubles perpendiculaires à l'axe sont imaginaires. Les foyers ordinaires se trouvent sur l'axe.

Les trois déférentes sont des hyperboles. La première est telle, que le cercle d'inversion O′ se trouve entre ses deux branches. Les deux autres Γ″ et Γ‴ sont disposées comme pour la première espèce.

122. *Constructions pour distinguer les trois espèces.* — On déterminera comme au nº **120** les points O′, G et les sommets que Γ′ possède sur l'axe de symétrie, puis on construira une des tangentes de cette conique (nº **40**). Suivant que cette tangente passera en dehors des sommets de Γ′, à l'un d'eux, ou entre eux, la déférente Γ′ sera une ellipse, deux points ou une hyperbole, et la spirique appartiendra à la première, à la seconde ou à la troisième espèce.

Transitions du premier genre au second genre.

123. *Première espèce.* — Le point équatorial est en O″.

La courbe se décompose en deux cercles qui se coupent aux mêmes points réels ε″ et φ″ que les cercles O′ et O‴ (nº **15**), et qui sont orthogonaux au cercle imaginaire O″.

Deuxième espèce. — Le point équatorial coïncide avec le centre G.

La courbe est remplacée par un être géométrique formé d'une droite double et de quatre points situés sur elle (nºˢ **93** et **110**).

§ II. — *Les quatre sommets sur l'axe sont imaginaires.*

124. Les trois centres d'inversion sont réels et distincts. L'un d'eux O′ est d'un côté du centre G des moyennes distances; les deux autres O″ et O‴ de l'autre côté.

Suivant que le point équatorial est sur le segment GO″ ou en dehors de ce segment, la spirique se compose de deux ovales ou est imaginaire.

Premier genre. — Deux ovales situés de part et d'autre de l'axe de symétrie.

125. Le point équatorial est sur le segment GO''.

Les deux tores dont les axes se croisent en O' sont réels; les quatre autres imaginaires.

Les foyers singuliers se trouvent hors de l'axe de symétrie. La déférente Γ' est une ellipse qui coupe le cercle O' en quatre points. Les deux autres déférentes sont des hyperboles : Γ''' ne rencontre pas le cercle O'''.

Chaque ovale a quatre sommets, deux sur le cercle O' et deux sur le cercle O'''.

Second genre. — Spirique imaginaire.

126. On est conduit à distinguer *sept espèces* suivant la position du point équatorial par rapport aux centres d'inversion et au point G. Il serait peu intéressant de reproduire en détail tout ce qui concerne ces espèces.

Les tores dont les axes passent par les points O'' et O''' sont imaginaires; mais ceux qui correspondent au centre O' sont réels quand le point équatorial est au delà de O'''. On les trouve réduits à des cercles quand ce point est en O''' (n° **91**).

La déférente Γ'' est toujours imaginaire. Chacun des deux autres est une ellipse située dans l'intérieur du cercle d'inversion, ou une ellipse imaginaire, ou une hyperbole dont chaque branche rencontre le cercle d'inversion.

Transitions entre les deux genres.

127. *Première espèce.* — Le point équatorial est en G. La courbe est remplacée par un être géométrique.

Seconde espèce. — Le point équatorial est en O''. La partie réelle de la courbe ne se compose que de deux points. Les tores du second couple sont réels, mais réduits à des cercles.

Les foyers singuliers sont hors de l'axe.

§ III. — *Deux des quatre sommets sur l'axe sont réels et les deux autres imaginaires.*

128. La courbe a sur son axe un centre d'inversion réel O', et deux sommets réels situés d'un même côté de ce point. Les centres d'inversion O'' et O''' sont imaginaires, ainsi que les déférentes et les tores qui leur correspondent. Les deux autres tores sont réels quand les points E et G sont de côtés différents du centre O'.

Deux foyers ordinaires réels se trouvent sur l'axe; les deux autres sont les intersections réelles de la déférente Γ' avec le cercle O'. Ces foyers ne jouissent pas des propriétés vectoriales.

La discussion détaillée montre qu'il y a six espèces suivant la position du point équatorial.

CHAPITRE IV.

CUBIQUE CIRCULAIRE DOUÉE D'UN AXE.

Considérations générales.

129. Toute cubique circulaire douée d'un axe peut être représentée par l'équation (9) du n° **111**, et, par suite, doit être considérée comme une spirique dont le centre des moyennes distances est à l'infini. Les centres d'inversion sont les trois points où l'axe rencontre la cubique. Je supposerai que ces points sont distincts; les variétés des spiriques à point double seront examinées dans le Chapitre V.

En faisant le coefficient a égal à l'unité, les équations (7) et (8) du n° **108** deviennent

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$
$$x(x^2 + y^2) + bx^2 - ey^2 + cx + d = 0:$$

e est l'abscisse du point équatorial mesurée à partir du point qui a été pris arbitrairement pour origine.

150. On trouve sans difficulté que les asymptotes imaginaires sont représentées par l'équation

$$y\sqrt{-1} = x + \frac{b+e}{2}.$$

Ces droites déterminent par leur intersection un foyer singulier situé sur l'axe. Si f est l'abscisse de ce foyer, on a

$$f = -\frac{b+e}{2}.$$

Le second foyer singulier est à l'infini. Les coniques déférentes sont donc des paraboles, ce qu'on pouvait prévoir par les considérations présentées au n° **45**.

151. Je désigne par λ', λ'', λ''' les abscisses des trois centres d'inversion; la somme de ces longueurs est égale à $-b$, et, par suite, l'expression de f devient

$$f = \frac{\lambda' + \lambda'' + \lambda''' - e}{2}.$$

Les sommets des trois paraboles ont pour abscisses (n° **85**)

$$c' = \frac{\lambda'' + \lambda'''}{2}, \quad c'' = \frac{\lambda''' + \lambda'}{2}, \quad c''' = \frac{\lambda' + \lambda''}{2}.$$

Ces relations donnent

$$2(f - c') = \lambda' - e, \quad 2(f - c'') = \lambda'' - e, \quad 2(f - c''') = \lambda''' - e.$$

La distance du sommet d'une parabole déférente à son foyer est égale à la moitié de la distance du point équatorial au centre d'inversion correspondant, et dirigée dans le même sens. Si l'on suppose le point équatorial mobile, lorsqu'il passe à un centre d'inversion, la parabole déférente se retourne. Elle se réduit à deux points dont un à l'infini, quand le point équatorial est au centre d'inversion.

132. On peut mettre l'équation de la cubique sous la forme

$$(x-\lambda')(x-\lambda'')(x-\lambda''')+(x-e)y^2=0.$$

Cette équation conduit à diverses propositions assez intéressantes, mais qui n'ont pas d'importance dans la question qui nous occupe. Je me bornerai à remarquer que lorsque le point équatorial coïncide avec un des centres d'inversion, la cubique se décompose en une droite passant par ce point, et un cercle qui a pour diamètre le segment de l'axe compris entre les deux autres centres d'inversion. Il était facile de prévoir ce résultat (nos **66** et **107**).

133. La construction exposée au n° **79** montre que tous les tores sont imaginaires; cependant dans le cas où le point équatorial coïncide à l'infini avec le centre des moyennes distances, on trouve que les axes des tores sont réels et se confondent avec l'axe de symétrie.

La courbe ne possède pas de tangentes doubles; et, par suite, la surface qu'elle engendre en tournant autour de son axe n'admet pas de sections circulaires.

§ I. — *Les trois sommets sur l'axe (ou centres d'inversion) sont réels.*

134. La spirique se compose d'un ovale et d'une branche infinie.

Première espèce. — Le point équatorial est en dehors du segment de l'axe compris entre les centres d'inversion extrêmes, par exemple, en deçà du point O'.

L'asymptote, qui, comme nous le savons, passe par le point équatorial (n° **111**), est située du côté de la branche infinie opposé à celui où se trouve l'ovale. Les foyers appartiennent au cercle O'.

Seconde espèce. — Le point équatorial coïncide avec un des centres d'inversion extrêmes, par exemple, avec O'.

La cubique se décompose en une droite et un cercle qui ne se coupent pas (n° **130**).

Troisième espèce. — Le point équatorial est entre deux centres d'inversion, par exemple, entre O' et O''.

L'asymptote est située entre la branche infinie et l'ovale. Les foyers réels sont sur le cercle O'.

Quatrième espèce. — Le point équatorial coïncide avec le centre d'inversion qui est entre les deux autres.

La spirique est remplacée par une droite et un cercle qui se coupent.

Cinquième espèce. — Je rattache à ce genre l'être géométrique que l'on obtient quand, les centres d'inversion étant réels et distincts, le centre des moyennes distances et le point équatorial coïncident à l'infini.

§ II. — *Deux des trois sommets sur l'axe sont imaginaires.*

155. Un seul des cercles d'inversion est réel. La courbe a sur ce cercle deux sommets et deux foyers. Les deux autres foyers ordinaires sont sur l'axe. La spirique se compose d'une branche infinie.

On aurait une droite si le point équatorial était au centre d'inversion réel, et un être géométrique s'il se trouvait à l'infini.

CHAPITRE V.

SPIRIQUE AYANT UN POINT DOUBLE SUR SON AXE.

Généralités.

156. Deux des centres d'inversion sont réunis au point double O_2 de la spirique (nº **17**). Le troisième point double O''' est nécessairement réel. Le cercle d'inversion O_2 a un rayon nul; l'autre O''' a pour rayon $O'''O_2$.

La spirique a sur son axe deux sommets réels ou imaginaires a_1 et a_2.

La conique déférente Γ_2 a deux sommets sur l'axe aux milieux des segments $a_1 O_2$ et $a_2 O_2$. La seconde conique Γ''' touche le cercle O''' au point O_2. Elle passe par le milieu du segment $a_1 a_2$. Les observations présentées aux nºs **35** et **51** montrent comment le point double est produit dans la génération de la spirique comme anallagmatique.

137. La spirique n'appartient qu'à quatre tores distincts. Deux d'entre eux touchent le plan de la courbe en O_2 : leurs axes se croisent en O'''. Les deux autres ont en O_2 un point conique; chacun de ces derniers doit être considéré comme représentant deux tores.

La courbe est de la sixième classe; elle a quatre tangentes doubles : deux perpendiculaires à l'axe, et deux divergeant de O''' et respectivement perpendiculaires aux asymptotes de Γ'''.

La spirique a deux foyers réunis en O_2. En les négligeant, je dirai qu'elle possède deux foyers ordinaires réels.

138. Le cercle d'inversion O_2 ayant un rayon nul, la spirique est la podaire d'une conique homothétique à Γ_2 par rapport au point O_2, et de dimensions doubles (n° **55**).

Quand le point équatorial est à l'infini, on a la podaire d'un cercle (n° **86**), c'est-à-dire un limaçon de Pascal. Le cercle directeur est imaginaire, et la courbe se réduit au point double O_2 quand les points a_1 et a_2 sont imaginaires.

M. Cornu paraît avoir établi le premier d'une manière générale que la section d'un tore par un plan tangent est la podaire d'une conique. Cette proposition avait déjà été énoncée dans des cas particuliers par MM. Pagani et J.-A. Serret. Avant les publications de ces géomètres, M. Chasles avait dit que le limaçon de Pascal est une variété de l'ovale de Descartes.

139. Quand un des sommets a_1 et a_2 coïncide avec le point double O_2 en un point O_3, la spirique a un rebroussement. Les six tores qui contiennent la courbe se réduisent alors à deux distincts et symétriques. Chacun d'eux est tangent au plan de la courbe en un point conique.

La déférente et la conique dont la spirique est la podaire passent l'une et l'autre par O_3.

140. Il est important de pouvoir reconnaître facilement dans chaque cas particulier, si les branches qui passent au point double sont réelles ou imaginaires.

Reportons-nous aux équations du n° **108** : en mettant l'origine au

point O_2, et appelant λ''' l'abscisse du point O''', on a

$$\frac{b}{a} = -\lambda''', \quad c = 0, \quad d = 0;$$

et l'équation (8) devient

$$(x^2+y^2)^2 - 4px(x^2+y^2) + 4p\lambda''' x^2 + 4ep\frac{p-\lambda'''}{p-e}y^2 = 0.$$

J'appelle ω l'angle que l'une des tangentes en O_2 fait avec l'axe des abscisses; on trouve

$$\tang^2\omega = -\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{e}}{\frac{1}{p}-\frac{1}{\lambda'''}}.$$

A l'aide de cette équation on voit immédiatement si les valeurs de ω sont réelles ou imaginaires, lorsqu'on connaît les positions relatives des points E, G, O_2 et O'''.

Si le point E se meut sur l'axe, les trois autres étant fixes, lorsqu'il passera soit par le point O_2, soit par le point G, le carré de la tangente de ω changera de signe.

141. Quand on transforme la spirique par rayons vecteurs réciproques en prenant le point double O_2 pour centre d'inversion, on obtient une conique dans laquelle l'axe de symétrie est un axe principal. Les foyers des deux courbes sont réciproques.

La transformation en conique de la spirique à point double permet de déterminer diverses propriétés de cette dernière courbe (n° **116**).

§ I. — *Les deux sommets sur l'axe sont réels et situés de côtés différents du point double O_2.*

142. Cette disposition est celle à laquelle se rapporte la figure du n° **17**, le point G est en G_1. Les branches qui se croisent au point double O_2 ne sont réelles que quand le point équatorial est sur le segment GO_2 (n° **141**). La courbe a deux sommets sur le cercle O'''.

Premier genre. — Deux ovales extérieurs l'un à l'autre et se rejoignant à un point double.

143. Le point équatorial est sur le segment GO_2. Les tores sont imaginaires et les tangentes doubles perpendiculaires à l'axe réelles. Les coniques déférentes sont des hyperboles ayant leurs foyers réels sur l'axe.

Second genre. — Un ovale avec un point conjugué intérieur.

144. Le point équatorial est en dehors du segment GO_2.

On est conduit à distinguer cinq espèces. Les tores sont réels quand le point équatorial est du côté du centre des moyennes distances opposé à celui où se trouvent les centres d'inversion.

Transitions entre les deux genres.

145. La spirique est remplacée par un être géométrique lorsque le point équatorial est en G. Quand il se trouve en O_2, la courbe se décompose en deux cercles qui se touchent extérieurement.

Les transitions ne présentant aucune difficulté, je n'en parlerai pas dans les paragraphes qui vont suivre.

§ II. — *Les deux sommets sur l'axe sont réels, distincts et situés d'un même côté du point double* O_2.

146. Les points sont rangés sur l'axe dans l'ordre suivant : O_2, O''', G, a_1 et a_2. La courbe a deux sommets sur le cercle O'''.

Lorsque le point équatorial est en dehors du segment O_2G, la courbe présente deux ovales dont l'un est compris dans l'autre et qui se rejoignent au point double. Il y a trois espèces à considérer. Les tores sont réels dans l'une d'elles, celle que l'on obtient quand le point E est du côté du centre G opposé à celui où se trouvent les centres d'inversion.

Dans le cas où le point équatorial est sur le segment O_2G, la courbe est un ovale ayant un point conjugué extérieur. Les tores sont imaginaires. La discussion conduit d'ailleurs à distinguer trois espèces différentes.

§ III. — *Les deux sommets sur l'axe sont imaginaires.*

147. Le centre G est sur le segment O_2O'''. Les tores dont les axes se croisent en O_2 sont imaginaires.

Lorsque le point équatorial est entre les centres G et O_2, la courbe se compose de deux ovales situés de part et d'autre de l'axe et se rejoignant au point double O_2. Les deux tores dont les axes passent en O''' sont réels. La courbe a deux foyers et deux sommets sur le cercle O'''. Γ''' est une ellipse, et Γ_2 une hyperbole.

Quand le point équatorial est en dehors du segment GO_2, la partie réelle de la courbe est réduite au point double O_2. On trouve d'ailleurs pour les déférentes et les tangentes doubles cinq dispositions différentes suivant la position du point E par rapport au point O''' et à l'infini.

§ IV. — *Un des sommets sur l'axe est à l'infini.*

148. La courbe est une cubique circulaire à point double. Lorsque le point équatorial est du côté de O_2 opposé à O''', on a un ovale et une branche infinie qui se rejoignent au point double. Quand le point est au contraire du même côté de O_2 que le centre O_3, la courbe se compose d'une branche infinie avec un point conjugué.

Dans le premier cas, si les points E et O''' sont à des distances égales de O_2, la courbe est une strophoïde.

§ V. — *Un des deux sommets sur l'axe coïncide avec le point double.*

149. Les centres d'inversion O_2 et O''' coïncident en un seul O_3.

La courbe est un ovale ayant un rebroussement. Quand le point équatorial est en dehors du segment GO_3, la saillie du rebroussement est dirigée vers le seul sommet qui reste à la spirique sur son axe. On trouve la disposition contraire quand le point E est entre les points G et O_3. Trois foyers ordinaires sont réunis en O_3.

Lorsque le point équatorial est du côté de G opposé à celui où se trouve O_3, les deux tores sont réels.

CHAPITRE VI.

SPIRIQUE A CENTRE.

Considérations générales.

150. La spirique à centre rapportée à ses deux axes de symétrie a pour équation

$$(1)\qquad (x^2+y^2)^2+qx^2+ry^2+t=0.$$

Deux des centres d'inversion coïncident avec le centre O; les deux autres sont à l'infini.

On a pour déterminer les rayons des cercles d'inversion qui ont leur centre au point O l'équation

$$(2)\qquad R^2=\pm\sqrt{t}.$$

En appelant f l'abscisse d'un foyer singulier situé sur l'axe des abscisses que je regarderai comme le premier axe de symétrie, on trouve

$$(3)\qquad f=\pm\sqrt{\frac{r-q}{4}}.$$

Je considérerai souvent la spirique comme donnée par ses quatre sommets sur l'axe des abscisses et par ses foyers singuliers. Son équation sera alors

$$(4)\qquad (x^2+y^2)^2+qx^2+(q+4f^2)y^2+t=0.$$

151. L'équation (6) du n° **106**, qui fait connaître les foyers simples, devient, lorsqu'on y suppose s et p nuls,

$$(5)\qquad (q-r)u^4+(4t-qr)u^2+(q-r)t=0,$$

ou bien

$$(6)\qquad (u^4+qu^2+t)+\frac{q^2-4t}{4f^2}u^2=0.$$

Si l'on fait passer f^2 par toutes les grandeurs positives ou négatives, on aura une involution dans laquelle deux des centres d'inversion de chaque groupe seront au point O, et le troisième à l'infini.

Quand f^2 est infini, les foyers coïncident avec les sommets.

Résolvant l'équation (5), on obtient

$$(7) \qquad u^2 = \frac{qr - 4t \pm \sqrt{(q^2 - 4t)(r^2 - 4t)}}{2(q-r)}.$$

Détermination des tores qui passent par une spirique à centre.

152. Pour accommoder au cas que j'examine les équations (11) du n° **75**, il faut y supposer nul non-seulement s, mais encore e, car le point équatorial coïncide avec l'origine O. On trouve alors

$$\rho \cos\omega = 0, \qquad \rho^2 - a^2 - b^2 = \frac{r}{2},$$

$$a^2 \sin^2\omega = \frac{q-r}{4}, \quad a^2 b^2 = \frac{r^2 - 4t}{16}.$$

En vertu de la première de ces équations, il faut que ρ soit nul, ou que ω soit égal à 90°. On obtient ainsi les deux solutions suivantes :

$$(8) \qquad \left\{\begin{aligned} &\rho = 0,\\ &a^2 = -\frac{r}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{t},\\ &b^2 = -\frac{r}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{t},\\ &\sin^2\omega = \frac{q-r}{-r+2\sqrt{t}}; \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} &\omega = 90^\circ,\\ &a^2 = \frac{q-r}{4},\\ &b^2 = \frac{r^2-4t}{4(q-r)},\\ &\rho^2 = \frac{q^2-4t}{4(q-r)}. \end{aligned}\right.$$

Le radical devant être considéré comme portant avec lui le double signe, on voit que la spirique appartient à trois couples de tores ayant leur axe dans le plan principal qui contient l'axe des abscisses. Deux de ces tores ont leur axe parallèle au plan de la spirique; les quatre autres ont le même centre que cette courbe.

La spirique à centre est ainsi l'intersection d'un tore par un plan passant par son centre ou parallèle à son axe.

Cette courbe, étant symétrique par rapport à deux axes, appartient à douze tores; mais ceux dont les axes se trouvent dans le plan principal qui contient les foyers singuliers sont nécessairement imaginaires (nº **82**).

Pour la facilité de la discussion, je désignerai par T′ et T″ les deux tores non symétriques que donnent les premières formules (8). Le troisième dont l'axe est parallèle à l'axe des abscisses sera T‴. J'appellerai T'_1, T''_1, T'''_1 les trois tores analogues aux précédents, et dont les axes sont dans le second plan principal.

Spirique considérée comme lieu des points de rencontre des couples de tangentes d'une conique qui comprennent un angle donné.

153. Considérons la conique

$$\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1\,; \tag{9}$$

le lieu des points de concours des couples de tangentes à cette courbe qui comprennent un angle φ, a pour équation

$$\begin{aligned}(x^2+y^2)^2-2(m^2+n^2+2n^2\cot^2\varphi)x^2\\ -2(m^2+n^2+2m^2\cot^2\varphi)y^2+(m^2+n^2)^2+4m^2n^2\cot^2\varphi=0.\end{aligned} \tag{10}$$

Ce lieu est donc une spirique à centre dans laquelle les coefficients q, r, t ont les valeurs suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} q&=-2(m^2+n^2+2n^2\cot^2\varphi),\\ r&=-2(m^2+n^2+2m^2\cot^2\varphi),\\ t&=(m^2+n^2)^2+4m^2n^2\cot^2\varphi.\end{aligned}\right. \tag{11}$$

M. Garlin a signalé, en 1854, l'identité du lieu dont il est question, avec la section du tore par un plan parallèle à son axe. Les théorèmes contenus dans les numéros suivants ne se trouvent pas dans le Mémoire de M. Garlin.

L'équation (10) n'éprouve aucune modification quand on y remplace l'angle φ par son supplément. Cela tient à ce que l'on peut prendre indifféremment l'une ou l'autre des deux tangentes que l'on

peut mener d'un point à la conique pour origine de l'angle qu'elles comprennent. M. Laguerre a présenté à la Société Philomathique d'excellentes observations sur les questions de ce genre, dans la séance du 21 novembre 1868.

154. Éliminant φ, puis n^2, entre les équations (10), on obtient d'abord

$$(12)\quad \begin{cases} m^4 - n^4 + qm^2 + t = 0, \\ m^4 - n^4 - rn^2 - t = 0; \end{cases}$$

et ensuite

$$(13)\quad (q^2 - r^2)m^4 - q(r^2 - 4t)m^2 - t(r^2 - 4t) = 0.$$

Les équations (12) donnent d'ailleurs

$$(14)\quad qm^2 + rn^2 + 2t = 0.$$

A chacune des deux valeurs de m^2 données par l'équation (13) correspond un système de valeurs pour n^2 et pour $\cot^2\varphi$. Il résulte de là que *toute spirique à centre est, de deux manières différentes, le lieu des points de concours des couples de tangentes à une conique qui comprennent un angle donné.*

Les équations qui donnent n^2 et φ sont

$$(15)\quad \begin{cases} (r^2 - q^2)n^4 - r(q^2 - 4t)n^2 - t(q^2 - 4t) = 0, \\ (q - r)^2 \operatorname{tang}^4\varphi - 4(qr - 4t)\operatorname{tang}^2\varphi + 16t = 0. \end{cases}$$

Résolvant les équations (13) et (15) et établissant la concordance des signes par les relations (14) et (11), on obtient

$$(16)\quad \begin{cases} m^2 = \dfrac{q(r^2 - 4t) + r\sqrt{(q^2 - 4t)(r^2 - 4t)}}{2(q^2 - r^2)}, \\ n^2 = \dfrac{-r(q^2 - 4t) - q\sqrt{(q^2 - 4t)(r^2 - 4t)}}{2(q^2 - r^2)}, \\ \operatorname{tang}^2\varphi = 2\,\dfrac{(qr - 4t) + \sqrt{(q^2 - 4t)(r^2 - 4t)}}{(q - r)^2}, \end{cases}$$

J'appellerai Λ_1 et Λ_2 les deux coniques que nous venons de déterminer. Leurs axes seront m_1, n_1 et m_2, n_2.

133. L'équation de la spirique à centre ne contenant que trois coefficients, il existe nécessairement une relation entre les longueurs des axes des deux coniques Λ_1 et Λ_2.

Je pose

$$n^2 = km^2;$$

l'équation (14) donne

$$(17) \qquad m^2 = -\frac{2t}{q+kr}, \quad n^2 = -\frac{2kt}{q+kr}.$$

En portant ces valeurs dans l'une des équations (12), on obtient

$$(18) \qquad k^2 = \frac{q^2-4t}{r^2-4t}.$$

Les deux valeurs de k sont égales et de signes contraires; par conséquent on a

$$(19) \qquad \frac{n_1^2}{m_1^2} + \frac{n_2^2}{m_2^2} = 0.$$

Les deux coniques Λ_1 et Λ_2 sont de genres différents; l'hyperbole a pour asymptotes les diagonales du rectangle circonscrit à l'ellipse.

Une spirique est déterminée par deux coniques satisfaisant aux relations qui viennent d'être indiquées. Si l'on désigne par k_1 le rapport des carrés des axes de la conique Λ_1, on trouve que l'équation de la spirique en fonction de m_1^2, m_2^2 et k_1 est

$$(20) \qquad \left\{ \begin{aligned} &(x^2+y^2)^2 - (1-k_1^2)(m_1^2+m_2^2)x^2 + \frac{1-k_1^2}{k_1}(m_1^2-m_2^2)y^2 \\ &\qquad\qquad\qquad + (1-k_1^2)m_1^2 m_2^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

On peut prendre pour les coniques Λ_1 et Λ_2 un cercle et une hyperbole équilatère; k^2 est alors égal à l'unité, et la spirique se réduit

à son centre, à moins toutefois que les axes de l'une des coniques ne soient infinies. Dans ce cas, suivant que la grandeur infinie est le diamètre du cercle ou l'axe de l'hyperbole, on a une cassinoïde ou deux cercles concentriques, comme je le dirai plus loin (n° **162**).

156. Le système des deux coniques A_1 et A_2 a pour équation

$$\frac{x^4}{m_1^2 m_2^2}+\frac{y^4}{n_1^2 n_2^2}+\frac{1}{n_1^2 n_2^2}\left(\frac{n_1^2}{m_1^2}+\frac{n_2^2}{m_2^2}\right)x^2y^2-\left(\frac{1}{m_1^2}+\frac{1}{m_2^2}\right)x^2$$
$$-\left(\frac{1}{n_1^2}+\frac{1}{n_2^2}\right)y^2+1=0.$$

Eu égard à la relation (19), le terme en x^2y^2 disparaît; en introduisant dans les coefficients des autres termes les valeurs de m_1^2, m_2^2, n_1^2 et n_2^2 prises dans les équations (16), on obtient

$$(21)\qquad -\frac{q^2-r^2}{r^2-4t}x^4+\frac{q^2-r^2}{q^2-4t}y^4+qx^2+ry^2+t=0.$$

La courbe représentée par le système des deux coniques est de la quatrième classe, et par conséquent a seize foyers, dont quatre sont réels. Ceux-ci coïncident avec les foyers réels des coniques, quand les carrés de leurs axes sont réels; mais lorsque ces carrés sont imaginaires conjugués, les foyers réels de la courbe (21) se trouvent hors des axes, en des positions symétriques, et par conséquent sur un cercle décrit du point O comme centre.

157. On déduit des deux premières équations (16)

$$(22)\qquad m^2-n^2=\frac{qr-4t\pm\sqrt{(q^2-4t)(r^2-4t)}}{2(q-r)}.$$

En comparant les équations (7) et (22), on reconnaît que *les foyers du système des deux coniques* A_1 *et* A_2 *coïncident avec ceux de la spirique*. Quand les coniques sont réelles, les foyers réels de la spirique sont sur les axes de symétrie. Lorsque ces foyers se trouvent hors des axes, les coniques sont imaginaires, et les carrés des longueurs de leurs axes sont imaginaires conjuguées.

158. Les deux premières équations (11) donnent

$$q - r = -4(n^2 - m^2)\cot^2\varphi.$$

Cette valeur introduite dans la relation (3) donne

(23) $$-f^2 = (m^2 - n^2)\cot^2\varphi.$$

Les foyers singuliers sont les centres des cercles décrits sur le segment compris entre les foyers de l'une quelconque des coniques Λ_1 et Λ_2, *et capables de l'angle* φ *qui correspond à cette conique.* Cette proposition peut être déduite d'un théorème donné par M. Laguerre sur les foyers singuliers des lieux des points où se coupent les droites qui touchent deux courbes fixes et qui comprennent un angle donné (journal *l'Institut*, 30 novembre 1868).

La formule (23) est très-utile pour reconnaître dans chaque cas si un angle φ_1 ou φ_2 est réel ou imaginaire.

159. En ajoutant l'une à l'autre les deux premières équations (16), on a

$$m^2 + n^2 = -\frac{qr + 4t + \sqrt{(q^2 - 4t)(r^2 - 4t)}}{2(q + r)}.$$

D'après cette équation et la relation (2), on trouve

(24) $$(m_1^2 + n_1^2)(m_2^2 + n_2^2) = R^4.$$

On déduit de la relation (24) et des théorèmes trouvés plus haut diverses constructions utiles.

Introduction des paramètres dans les formules.

160. Il nous sera commode d'avoir dans les formules, au lieu des coefficients q, r, t, les demi-axes c' et c'' des coniques Γ' et Γ'' (nº **85**), et l'abscisse f des foyers singuliers.

On trouve

(25) $$q = -2(c'^2 + c''^2),\quad r = -2(c'^2 + c''^2) + 4f^2,\quad t = (c'^2 - c''^2)^2.$$

A l'aide de ces valeurs, on obtient, pour les coordonnées des sommets de la spirique situés sur l'axe des y,

$$y^2 = c'^2 + c''^2 - 2f^2 \pm 2\sqrt{(f^2 - c'^2)(f^2 - c''^2)}. \tag{26}$$

L'équation (7) relative aux foyers devient

$$n^2 = c'^2 + c''^2 - 2\frac{c'^2 c''^2}{f^2} \pm 2\frac{c'c''}{f^2}\sqrt{(f^2 - c'^2)(f^2 - c''^2)}. \tag{27}$$

Les grandeurs relatives aux coniques A_1 et A_2 sont données par les équations suivantes

$$(28)\quad \left\{ \begin{aligned} m^2 &= \frac{-(c'^2+c''^2)(f^2-c'^2)(f^2-c''^2)-(c'^2+c''^2-2f^2)c'c''\sqrt{(f^2-c'^2)(f^2-c''^2)}}{f^2(c'^2+c''^2-f^2)},\\ n^2 &= \frac{(c'^2+c''^2-2f^2)c'^2c''^2+(c'^2+c''^2)c'c''\sqrt{(f^2-c'^2)(f^2-c''^2)}}{f^2(c'^2+c''^2-f^2)},\\ u^2 &= \frac{f^2(c'^2+c''^2)-2c'^2c''^2-2c'c''\sqrt{(f^2-c'^2)(f^2-c''^2)}}{f^2},\\ k^2 &= \frac{c'^2c''^2}{(f^2-c'^2)(f^2-c''^2)}. \end{aligned} \right.$$

Je n'indique pas les formules relatives aux tores. Il sera facile de faire la discussion à l'aide des équations (8) et (25).

161. Quand la spirique est réelle, elle a des sommets réels sur un de ses axes; car sans cela, eu égard à ses symétries, elle serait composée de quatre ovales, ce qui est impossible, puisqu'elle ne peut avoir que deux tangentes doubles perpendiculaires à un axe (nos **95** et **96**). En conséquence, si nous négligeons les variétés imaginaires, il nous suffira d'examiner les cas où la courbe a au moins deux points réels sur un axe qui sera pris pour axe des abscisses.

On a

$$c'^2 = \frac{-q + \sqrt{4t}}{2}, \quad c''^2 = \frac{-q - \sqrt{4t}}{2}. \tag{29}$$

Lorsque les quatre sommets sur l'axe des abscisses sont réels, c'^2 et c''^2 sont positifs. Si la courbe a seulement deux sommets réels, ces quantités sont imaginaires conjuguées. Quand une d'elles est négative, aucun des sommets sur l'axe n'est réel.

§ I. — *La courbe a quatre sommets réels sur un de ses axes.*

162. Je supposerai que les sommets sont fixes, et que les foyers singuliers occupent successivement toutes les positions possibles sur les axes. c'^2 et c''^2 sont alors des quantités positives constantes. Les formules du nº **160** permettent de faire facilement la discussion.

Première espèce. — Les foyers singuliers coïncident au centre de la courbe. f^2 étant nul, r est égal à q, et on voit par l'équation (1) que la spirique se décompose en deux cercles concentriques. Deux foyers ordinaires coïncident au centre; les autres sont à l'infini. Les déférentes sont des cercles.

Une des valeurs de m^2 est infinie; la conique correspondante est une hyperbole équilatère ayant des axes infinis. L'autre conique est un cercle.

La spirique appartient à deux tores distincts qui ont pour axe la perpendiculaire élevée par son centre à son plan. Ce plan représente un troisième tore.

Deuxième espèce. — Les foyers singuliers sont entre les sommets de la première déférente. f^2 est plus petit que c'^2, qui est supposé moindre que c''^2.

La courbe se compose de deux ovales dont un contient l'autre; les foyers ordinaires sont sur le second axe de symétrie. Les deux déférentes sont des ellipses.

Les coniques A_1 et A_2 sont réelles ainsi que les angles φ_1 et φ_2 qui leur correspondent. L'ellipse est dans l'intérieur des deux ovales.

Les tores T'_1, T''_1, T'''_1 sont réels, les autres imaginaires.

Troisième espèce. — Les foyers singuliers coïncident avec les sommets de la première déférente. La spirique se décompose en deux cercles égaux dont les centres sont sur l'axe des abscisses et qui se coupent sur l'axe des ordonnées. Ces cercles sont les méridiens d'un tore, et appartiennent à deux autres tores bitangents à leur plan et symétriques l'un de l'autre.

Les coniques A_1 et A_2 sont remplacées chacune par les deux points où les cercles se coupent.

Quatrième espèce. — Les foyers singuliers sont entre les sommets

des deux déférentes. La spirique se compose de deux ovales extérieurs l'un à l'autre. Chaque ovale a deux sommets sur le cercle d'inversion réel. Les foyers ordinaires sont sur ce même cercle.

Une des déférentes est une ellipse et l'autre une hyperbole. Les coniques A_1 et A_2 sont imaginaires, le tore T''_1 est seul réel.

Cinquième espèce. — Les foyers singuliers coïncident avec la seconde déférente. La spirique est remplacée par deux cercles égaux qui ne se coupent pas.

Sixième espèce. — Les foyers singuliers sont au delà des sommets de la seconde déférente. Les déférentes sont des hyperboles ayant leurs sommets sur l'axe des abscisses. Les foyers ordinaires sont sur cet axe; ceux qui sont d'un même côté du centre se trouvent entre les deux sommets qui sont de ce côté.

La courbe est formée de deux ovales extérieurs l'un à l'autre.

Les angles φ_1 et φ_2 sont imaginaires. L'ellipse A_1 ou A_2 est réelle ou imaginaire suivant que f^2 est plus petit ou plus grand que $(c'^2 + c''^2)$.

Cas spécial de la cassinoïde. — Lorsque f^2 est égal à $(c'^2 + c''^2)$, les coefficients q et r sont égaux et de signes contraires, et la spirique est une cassinoïde. Les foyers singuliers coïncident avec deux des foyers ordinaires, résultat intéressant déjà signalé, pour cette courbe, par M. Salmon.

Si l'on étudie les tores qui passent par la cassinoïde, on obtient un théorème donné par M. J.-A. Serret dans le Mémoire cité à l'Avant-propos.

Une des coniques A_1 et A_2 est un cercle; l'autre est une hyperbole équilatère dont les foyers coïncident avec les foyers simples de la cassinoïde. L'angle φ correspondant à l'hyperbole est imaginaire. Si cet angle était réel, la cassinoïde aurait seulement deux sommets réels sur ses axes.

Une spirique étant donnée par un cercle d'inversion et une conique déférente concentriques, pour qu'elle soit une cassinoïde, il faut que le carré du rayon du cercle d'inversion soit égal à la somme des carrés des demi-axes de la conique.

Septième espèce. — Les foyers singuliers sont à l'infini. La spirique se réduit à un être géométrique.

Huitième espèce. — Les foyers singuliers sont sur le second axe de

symétrie. La courbe se compose de deux ovales, dont un comprend l'autre. Les déférentes sont des ellipses. Les tores T′, T″, T‴ sont réels. Les foyers ordinaires se trouvent sur l'axe des abscisses : deux d'entre eux à l'intérieur de la petite déférente, et les deux autres à l'extérieur de la grande. Les coniques A_1, A_2 et les angles qui leur correspondent sont réels.

§ II. — *La courbe a sur chacun de ses axes deux sommets réels et deux imaginaires.*

163. Quand la courbe a sur un de ses axes deux sommets réels et deux imaginaires, elle se compose de deux ovales concentriques, dont un est imaginaire et l'autre réel.

Il est convenable de ne plus employer les quantités c'^2 et c''^2, parce qu'elles sont imaginaires. J'appelle 2α, 2β les longueurs des deux axes de la courbe. J'ai

$$\alpha^4 + q\alpha^2 + t = 0, \quad \beta^4 + r\beta^2 + t = 0;$$

et je pose

$$h^2 = \frac{4f^2}{\alpha^2 - \beta^2} - 1. \tag{30}$$

A l'aide de ces formules et de la relation (3), on obtient

$$q = h^2\beta^2 - \alpha^2, \quad r = h^2\alpha^2 - \beta^2, \quad t = -h^2\alpha^2\beta^2. \tag{31}$$

Une spirique quelconque peut être donnée par un système de valeurs des trois quantités α^2, β^2 et h^2. Dans le cas que j'examine, on peut prendre pour α^2 et β^2 des grandeurs réelles et positives, parce que la courbe rencontre chacun de ses axes; h^2 est alors essentiellement positif, car le coefficient t est négatif, puisque c'^2 et c''^2 sont imaginaires (n° **161**).

Je peux supposer que le plus grand des deux axes de la courbe a été pris pour axe des abscisses, et ainsi que α^2 est plus grand que β^2.

164. L'introduction des expressions (31) dans les équations (16)

et (22) donne

$$\left\{\begin{aligned} m_1^2 &= -(h^2\alpha^2+\beta^2)\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^4-\beta^4},\\ n_1^2 &= (h^2\beta^2+\alpha^2)\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^4-\beta^4},\\ u_1^2 &= -(h^2+1)\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2-\beta^2};\end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} m_2^2 &= (h^2\alpha^2+\beta^2)\frac{h}{h^4-1},\\ n_2^2 &= (h^2\beta^2+\alpha^2)\frac{h^2}{h^4-1},\\ u_2^2 &= \frac{h^2}{h^2+1}(\alpha^2-\beta^2).\end{aligned}\right.$$

La conique A_1 est une hyperbole ayant pour foyers les deux foyers que la spirique possède sur le plus petit de ses deux axes.

L'ellipse A_2 a ses foyers sur le grand axe; elle est réelle ou imaginaire suivant que h^2 est plus grand ou plus petit que l'unité. Quand h^2 est égal à 1, la courbe est une cassinoïde, et l'ellipse A_2 un cercle d'un rayon infini.

h^2 étant essentiellement positif, il résulte de l'équation (30) qu'on ne peut faire varier f^2 que depuis $\frac{\alpha^2-\beta^2}{4}$ jusqu'à l'infini. Quand f^2 est plus grand que $\frac{\alpha^2-\beta^2}{2}$, l'ellipse A_2 est réelle.

On trouve par l'équation (23) que l'angle φ_1 est réel, et l'angle φ_2 imaginaire.

r est plus grand que q, et t est négatif; il résulte de là, d'après les formules et les considérations du n° **155**, que les deux tores symétriques qui ont leurs axes parallèles au petit axe de la courbe sont seuls réels.

§ III. — *Le centre de la courbe est un point double.*

165. Je désigne par $\pm\alpha$ et $\pm\beta$ les coordonnées des points où la courbe rencontre ses axes. On a

$$q = -\alpha^2,\quad r = -\beta^2,\quad t = 0,$$

Je suppose que α^2 est plus grand que β^2. Si la spirique a une branche réelle, α^2 est positif; β^2 peut être positif, nul ou négatif.

On trouve

$$m_1^2 = -\frac{\alpha^2\beta^4}{\alpha^4-\beta^4}, \quad n_1^2 = \frac{\alpha^4\beta^2}{\alpha^4-\beta^4}, \quad \text{tang}^2\varphi_1 = \frac{4\alpha^2\beta^2}{(\alpha^2-\beta^2)^2}, \quad n_1^2 = -\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}.$$

La conique Λ_2 est remplacée par les deux droites

$$\frac{y}{x} = \pm\frac{\alpha}{\beta}\sqrt{-1}.$$

L'angle correspondant φ_2 est nul.

Lorsque β^2 est positif, la spirique se compose d'un ovale ayant à son centre un point conjugué. Λ_1 est une hyperbole ayant ses foyers sur le petit axe de la spirique, Λ_2 une ellipse réduite à un point; φ_1 est réel.

Quand β^2 est nul, la spirique est le système de deux cercles égaux et tangents l'un à l'autre. Les coniques Λ_1 et Λ_2 sont remplacées par la droite qui touche les deux courbes à leur point de contact.

Lorsque β^2 est négatif, la spirique est formée de deux ovales qui se rejoignent à un point double. Λ_1 est une ellipse imaginaire dont les foyers sont sur l'axe transverse; φ_1 est imaginaire. La conique Λ_2 se trouve remplacée par les deux tangentes de la courbe à son point double.

Lorsque β^2 n'est pas nul, la spirique appartient à quatre tores réels et distincts. Leurs axes sont dans le plan principal qui contient l'axe non transverse ou le petit axe de la courbe.

Je ne parlerai pas des déférentes et de la génération de la spirique comme podaire d'une conique, ces questions ayant été suffisamment examinées au Chapitre V.

Théorèmes sur les équations algébriques;

Par M. Camille JORDAN [*].

---

1. On peut appeler *ordre* d'une équation algébrique l'ordre (ou nombre des substitutions) de son groupe.

Si le groupe G d'une équation algébrique E a pour ordre O et contient un autre groupe H ayant pour ordre $\frac{O}{l}$, une fonction des racines de E, invariable par les substitutions de H, dépendra d'une équation irréductible de degré l.

Si le groupe G d'une équation algébrique ne contient aucun autre groupe auquel toutes ses substitutions soient permutables (sauf le groupe formé par la substitution *unité*), cette équation est *simple* et ne pourra être résolue par aucune équation auxiliaire, dont l'ordre ne soit pas un multiple du sien.

Si le groupe G ne jouit pas de la propriété ci-dessus, on pourra déterminer (souvent de plusieurs manières) une suite de groupes G, H, I,..., 1 tels, que chacun d'eux soit contenu dans le précédent et permutable à ses substitutions, et ne soit contenu dans aucun groupe plus général jouissant de cette double propriété. Soient O, $\frac{O}{l}$, $\frac{O}{lm}$,..., 1 les ordres de ces groupes successifs. La résolution de l'équation proposée se ramène à la résolution successive d'équations simples dont les racines sont des fonctions rationnelles de celles de la proposée, et qui ont respectivement pour ordre l, m,....

Ces nombres l, m,... seront dits les *facteurs de composition* de la

---

[*] Cet article et le suivant sont extraits d'un *Traité des équations algébriques* en cours de publication.

proposée (ou de son groupe). Ils restent les mêmes, à l'ordre près, de quelque manière qu'on détermine la suite G, H, I,..., 1 [*].

2. Théorème. — *Soit G′ un groupe quelconque contenu dans un autre groupe* G; *ses facteurs de composition diviseront ceux de* G.

Soient en effet O l'ordre de G; l, m,... ses facteurs de composition; G, H, I,... une suite de groupes ayant respectivement pour ordre O, $\frac{O}{l}$, $\frac{O}{lm}$,... et tels, que chacun d'eux soit contenu dans le précédent et permutable à ses substitutions. Soient, d'autre part, G′, H′, I′,... les groupes respectivement formés par celles des substitutions de G′ qui appartiennent à G, à H, à I, etc.; O′, $\frac{O'}{l'}$, $\frac{O'}{l'm'}$,... leurs ordres respectifs. Chacun de ces groupes sera évidemment contenu dans le précédent, et, de plus, permutable à ses substitutions. Car, soient, par exemple, g' et h' deux substitutions quelconques appartenant aux groupes G′ et H′ : h' appartient à H, auquel les substitutions de G, et notamment g', sont permutables. Donc $g'^{-1}h'g'$ appartient à H; mais elle appartient aussi à G′ : donc elle appartient à H′; donc g' est permutable à ce dernier groupe.

Soient $\frac{O'}{\lambda_1}$ l'ordre d'un groupe G'_1 aussi général que possible parmi ceux qui contiennent H′, et sont contenus dans G′ et permutables à ses substitutions; $\frac{O'}{\lambda_1\lambda_2}$ l'ordre d'un groupe G'_2, aussi général que possible parmi ceux qui contiennent H′ et sont contenus dans G'_1 et permutables à ses substitutions, etc. Soient de même $\frac{O'}{l'\mu_1}$ l'ordre d'un groupe H'_1 aussi général que possible parmi ceux qui contiennent I′, et sont contenus dans H′ et permutables à ses substitutions, etc. Les groupes G′, G'_1, G'_2,..., H′, H'_1,..., I′,... formant ainsi par construction une suite telle, que chacun d'eux soit aussi général que possible parmi ceux qui sont contenus dans le précédent et permutables à ses

[*] Pour la démonstration de ces résultats, *voir* le *Commentaire sur Galois* que nous avons inséré dans les *Mathematische Annalen*, t. I.

substitutions, et ayant respectivement pour ordre O', $\frac{O'}{\lambda_1}$, $\frac{O'}{\lambda_1\lambda_2}$, ..., $\frac{O'}{l'}$, $\frac{O'}{l'\mu_1}$, ..., $\frac{O'}{l'm'}$, ..., les facteurs de composition de G' seront $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, $\frac{l'}{\lambda_1\lambda_2\ldots}$, $\mu_1, \ldots$, $\frac{m'}{\mu_1\ldots}$, ... Ils diviseront donc respectivement $l', m', \ldots$.

Nous achèverons la démonstration en prouvant que $l', m', \ldots$ divisent respectivement $l, m, \ldots$.

Soient en effet $h_1, h_2, \ldots$ les substitutions de H; $h'_1, h'_2, \ldots$ celles de H'; celles de G' seront de la forme $g'_\alpha h'_\beta$; $g'_1, g'_2, \ldots, g'_{l'}$ étant des substitutions de G' qui ne satisfassent à aucune relation de la forme $g'_\alpha = g'_{\alpha'} h'_{\beta'}$ (Serret, *Algèbre supérieure*, n° 413). Cela posé, les substitutions de G', appartenant à G, sont permutables à H. Le groupe K, dérivé de la combinaison de G' et de H, aura donc toutes ses substitutions de la forme $g'_\alpha h'_\beta h_\gamma$. Mais $h'_\beta h_\gamma$, appartenant à H, est de la forme h_δ : les substitutions de K seront donc de la forme $g'_\alpha h_\delta$. Réciproquement, les $l'\frac{O}{l}$ substitutions de cette forme obtenues en faisant varier α et δ appartiennent à G, et sont distinctes : car si l'on avait $g'_\alpha h_\delta = g'_{\alpha'} h_{\delta'}$, sans avoir $\alpha = \alpha'$, d'où $\delta = \delta'$, la substitution $g'^{-1}_{\alpha'} g'_\alpha = h_{\delta'} h_\delta^{-1}$ appartiendrait à H et à G', et par suite à H' : désignons-la par $h'_{\beta'}$; il viendrait $g'_\alpha = g'_{\alpha'} h'_{\beta'}$, ce qui est impossible.

Donc l'ordre de K est égal à $l'\frac{O}{l}$; mais ce groupe est contenu dans G, dont l'ordre est O; donc son ordre divise ce dernier nombre : donc l' divise l. De même m' divise m, etc.

5. Théorème. — *Soient* G *un groupe quelconque;* H *et* G' *deux groupes contenus dans* G; H' *le groupe formé par les substitutions communes aux deux précédents;* O, P, O', P' *les ordres respectifs de ces quatre groupes;* d, d', e, f *les valeurs des entiers* $\frac{O}{P}$, $\frac{O'}{P'}$, $\frac{O}{O'}$, $\frac{P}{P'}$, δ *le plus grand commun diviseur de* d *et de* e : d' *sera au plus égal à* d, *et divisible par* $\frac{d}{\delta}$.

Soient en effet $h_1, h_2, \ldots$ les substitutions de H; $h'_1, h'_2, \ldots$ celles de H' : celles de G' seront de la forme $g'_\alpha h'_\beta$; $g'_1, \ldots, g'_{d'}$ étant des sub-

stitutions convenablement choisies. En outre, le groupe G contiendra au moins les substitutions $g'_\alpha h_\beta$, qui sont toutes distinctes et en nombre Pd'. On aura donc $Pd' \overline{\leq} O$, d'où $d' \overline{\leq} d$.

D'autre part, la relation évidente $ed' = df$ montre que d' est divisible par $\frac{d}{\delta}$.

4. Théorème. — *Soit* E *une équation décomposable en facteurs rationnels* X, Y,... : *tout facteur de composition d'une des équations partielles* X, Y,... *sera un facteur de composition de* E; *et réciproquement, tout facteur de composition de* E *sera facteur de composition d'une ou plusieurs de ces équations partielles.*

En effet, on résoudra l'équation E en résolvant successivement les équations partielles X, Y,..., ce qui pourra se faire pour chacune d'elles à l'aide d'une suite d'équations simples.

Soient $x_1, x_2,\ldots$ les racines de l'équation X, lesquelles appartiennent également à E; l son premier facteur de composition : il existe une équation simple U, d'ordre l, dont la résolution fera connaître des fonctions de $x_1, x_2,\ldots$ qui auparavant n'étaient pas rationnelles. Cette résolution abaissera donc l'ordre de X et celui de E en les divisant l'un et l'autre par l. Quant à chacune des autres équations partielles, telle que Y, son ordre ne sera pas réduit par cette résolution, ou il sera divisé par l, auquel cas Y aura l pour facteur de composition.

Si donc on résout l'équation X par l'adjonction des racines d'une suite d'équations simples, on trouvera successivement que chacun des facteurs de composition de X est un facteur de composition de E. Quant aux autres équations partielles Y,..., leurs groupes pourront perdre par ces adjonctions quelques-uns de leurs facteurs de composition, mais conserveront tous ceux qui ne leur sont pas communs avec le groupe de X. Résolvant maintenant l'équation Y par l'adjonction des racines d'une suite d'équations simples, on verra de même que tous les facteurs de composition qui restent dans le groupe de l'équation Y sont des facteurs de composition de E; et que les équations partielles restantes Z,... conserveront après cette nouvelle adjonction tous ceux de leurs facteurs de composition qui ne leur sont pas communs avec X ou Y. On continuera ainsi jusqu'à ce qu'on ait résolu

successivement toutes les équations X, Y,.... Mais alors l'équation E sera elle-même résolue, et le théorème sera démontré.

5. Théorème. — *Soient* $\mathcal{E}$ *une équation irréductible et primitive de degré* n; E *l'équation de degré* $n-1$ *obtenue par l'adjonction d'une de ses racines,* a; X, Y,... *les diviseurs rationnels de cette dernière équation, supposée réductible. Tout facteur de composition de l'une des équations partielles* X, Y,... *divisera l'un au moins des facteurs de composition de chacune des autres équations partielles.*

Supposons, pour fixer les idées, qu'il y ait deux équations partielles, X et Y, et que Y ait un facteur de composition, m, qui ne divise aucun des facteurs de composition de X; nous allons prouver que l'équation $\mathcal{E}$, supposée irréductible, n'est pas primitive.

Soit en effet G le groupe de l'équation E : abaissons-le autant que possible par la résolution successive d'équations simples, dont l'ordre ne soit pas divisible par m; et supposons que ces adjonctions réduisent successivement le groupe de l'équation E à H,..., à K. L'équation partielle X étant complétement résolue par ces opérations, et l'équation Y ne l'étant pas, le groupe final K contiendra des substitutions différentes de l'unité; mais les racines x_1, x_2,... de X, qui sont actuellement connues, ne seront déplacées par aucune de ces substitutions.

La suite des facteurs de composition de K peut être déterminée, soit d'une seule manière, soit de plusieurs manières différentes; mais, dans tous les cas, le premier de ces facteurs sera divisible par m; car, sans cela, le groupe pourrait être abaissé, contrairement à l'hypothèse, par la résolution d'une équation simple dont l'ordre ne serait pas divisible par m. Réciproquement, K contient tous les groupes contenus dans G et jouissant de cette propriété. Car soit G′ un groupe quelconque contenu dans G et non dans K. Supposons, pour fixer les idées, que parmi les groupes de la suite G, H,..., K, le groupe H soit le premier qui ne contienne pas G′ : soit H′ le groupe formé par les substitutions communes à H et à G′; soient enfin O, $\frac{O}{l}$, O′, $\frac{O'}{l'}$ les ordres respectifs de G, H, G′, H′. Les premiers facteurs de

composition de G', λ_1, λ_2,... auront pour produit l', qui divise l (2) : ils ne sont donc pas divisibles par m.

6. Soient maintenant a, a_1,..., $a_{\mu-1}$ celles des racines de E que les substitutions de K laissent immobiles. Cette suite contenant, outre la racine a que l'on s'est adjointe, les racines x_1, x_2,... de l'équation X, contient plusieurs racines; d'autre part, elle ne les contient pas toutes.

Cela posé, soient $\mathcal{G}$ le groupe de $\mathcal{E}$; S une de ses substitutions, qui remplace a par une des racines a, a_1,..., $a_{\mu-1}$, telle que a_1 : elle remplacera toutes ces racines les unes par les autres. En effet, S transforme le groupe G, formé des substitutions de $\mathcal{G}$ qui ne déplacent pas a, en un groupe analogue G_1, formé de celles de ces substitutions qui ne déplacent pas a_1. Ceux des groupes partiels contenus dans G_1 qui jouissent de la propriété d'avoir leur premier facteur de composition nécessairement divisible par m seront évidemment les transformés de ceux des groupes partiels contenus dans G qui jouissent de cette propriété. Ils seront donc tous contenus dans un seul d'entre eux, qui sera le transformé de K, et aura seul le même ordre que ce dernier groupe. Mais G_1 contient K lui-même; ce sera donc là ce groupe d'ordre maximum qui contient tous les autres et qui est le transformé de K. Donc la substitution S transforme K en lui-même : donc elle permute exclusivement entre elles les racines a, a_1, a_2,... que les substitutions de K ne déplacent pas.

Toute substitution de $\mathcal{G}$ qui remplace l'une par l'autre deux des racines a, a_1,..., $a_{\mu-1}$ permute ces racines exclusivement entre elles. Car soit T une substitution de $\mathcal{G}$ qui remplace, par exemple, a_1 par a_2; ST, remplaçant a par a_2, permutera exclusivement entre elles les racines a, a_1,..., $a_{\mu-1}$: il en est de même pour S; donc il en est de même pour T.

Soient a' une autre racine quelconque; U une substitution de $\mathcal{G}$ qui remplace a par a' : les racines a', a'_1,..., $a'_{\mu-1}$ que U fait succéder à a, a_1,..., $a_{\mu-1}$ seront, d'après ce qui précède, essentiellement différentes de a, a_1,..., $a_{\mu-1}$. D'ailleurs toute substitution de $\mathcal{G}$ qui remplace une des racines a, a_1,..., $a_{\mu-1}$ par une des racines a', a'_1,..., $a'_{\mu-1}$ remplacera chacune des racines a, a_1,... $a_{\mu-1}$ par quelqu'une des racines a', a'_1,..., $a'_{\mu-1}$ Car soit V une substitution de $\mathcal{G}$ qui remplace,

par exemple, a par a'_1 : VU^{-1} remplace a par a_1 : elle remplacera donc les racines $a, a_1, \ldots, a_{\mu-1}$ les unes par les autres; et U les remplaçant par $a', a'_1, \ldots, a'_{\mu-1}$, $V = VU^{-1}.U$ les remplacera également, à l'ordre près, par $a', a'_1, \ldots, a'_{\mu-1}$.

Si les 2μ racines écrites ci-dessus n'épuisent pas le nombre n des racines de $\mathcal{E}$, soient a'' une autre racine, W une substitution de $\mathcal{G}$ qui remplace a par a'' : les racines $a'', a''_1, \ldots, a''_{\mu-1}$ que W fait succéder à $a, a_1, \ldots, a_{\mu-1}$ sont, d'après ce qui précède, essentiellement différentes de $a, a_1, \ldots, a_{\mu-1}$ et de $a', a'_1, \ldots, a'_{\mu-1}$.

Si $n > 3\mu$, on continuera de même; et l'on voit ainsi que n est un multiple de μ, et que les racines de la proposée peuvent être groupées en $\frac{n}{\mu}$ systèmes. D'ailleurs chaque substitution de $\mathcal{G}$ remplace les racines de chaque système par celles d'un même système. Car soit R une substitution de $\mathcal{G}$, qui remplace, par exemple, a'' par a'_1; et soient $a'_1, \alpha, \ldots, \delta$ les racines qu'elle fait succéder à $a'', a''_1, \ldots, a''_{\mu-1}$. La substitution WR appartient à $\mathcal{G}$, et remplace $a, a_1, \ldots, a_{\mu-1}$ par $a'_1, \alpha, \ldots, \delta$. Mais a'_1 appartient au système $a'_1, a'_2, \ldots, a'_{\mu-1}$. Donc $\alpha, \ldots, \delta$ sont les autres racines de ce système.

Donc l'équation $\mathcal{E}$ n'est pas primitive, ce qu'il fallait démontrer.

7. Corollaire I. — *L'équation $\mathcal{E}$ étant irréductible et primitive, tout nombre premier qui divise l'ordre de* E *divisera l'ordre de chacune des équations partielles* X, Y,....

Car soit p un semblable diviseur. Divisant l'ordre de E, il divise un de ses facteurs de composition; mais ce facteur de composition appartient à l'une au moins des équations partielles X, Y,... (4). Donc il divise un au moins des facteurs de composition de chacune des autres équations : donc il divise l'ordre de chacune d'elles.

Corollaire II. — *Si l'une des équations partielles* X, Y,... *a tous ses facteurs de composition premiers, il en est de même des autres.*

8. Théorème. — *Si une équation* E, *irréductible et de degré* n, *a son ordre divisible par un nombre premier* p, *supérieur à* $\frac{1}{2}n$, *son groupe* G *sera* $n - p + 1$ *fois transitif.*

Supposons en effet que G soit $n - q + 1$ fois transitif, q étant $< p$. Son ordre sera égal à $n(n-1)\dots(q+1)\Omega$, Ω étant l'ordre du groupe partiel $\mathcal{G}$ formé par celles de ses substitutions qui laissent immobiles $n - q$ racines données $a, a_1, \dots$, lequel est simplement transitif par rapport aux q racines restantes. Mais $n(n-1)\dots(q+1)$ n'est pas divisible par p, n étant $< 2p$ et $q > p$. D'autre part, Ω ne peut être divisible par p. En effet, considérons l'équation $\mathcal{E}$ de degré q à laquelle se réduit la proposée par l'adjonction des racines $a, a_1, \dots$; elle a évidemment pour groupe $\mathcal{G}$. Si elle n'est pas primitive, soit μ le nombre des systèmes entre lesquels se répartissent ses racines : son ordre Ω sera un diviseur de $1.2\dots\mu\left(1.2\dots\frac{q}{\mu}\right)^{\mu}$, et ne sera pas divisible par p, qui est supérieur à $\frac{q}{2}$, et, par suite, à μ et à $\frac{q}{\mu}$. Si, au contraire, l'équation $\mathcal{E}$ est primitive, son ordre est égal à $q\mathrm{O}$, O étant l'ordre de l'équation E', de degré $q - 1$, qu'on obtient en s'adjoignant une nouvelle racine b. Mais $\mathcal{G}$ étant simplement transitif, le groupe de E', formé par celles des substitutions de $\mathcal{G}$ qui laissent b immobile, sera intransitif : l'équation E' se décompose donc en plusieurs facteurs rationnels X, Y,.... L'une au moins de ces équations partielles sera d'un degré d inférieur à $\frac{q}{2}$, et, par suite, à p; son ordre, divisant $1.2\dots d$, ne sera pas divisible par p. Mais il est divisible par tout nombre premier qui divise O : donc O, et, par suite, $\Omega = q\mathrm{O}$ n'est pas divisible par p.

Sur l'équation aux vingt-sept droites des surfaces du troisième degré;

Par M. Camille JORDAN.

---

1. Steiner a fait connaître (*Journal de M. Borchardt*, t. LIII) les théorèmes suivants :

Toute surface du troisième degré contient vingt-sept droites.

L'une quelconque d'entre elles, a, en rencontre dix autres, se coupant elles-mêmes deux à deux, et formant ainsi avec a cinq triangles. Le nombre total des triangles ainsi formés sur la surface par les vingt-sept droites est de quarante-cinq.

Si deux triangles abc, a' b' c' n'ont aucun côté commun, on peut leur en associer un troisième a'' b'' c'' tel, que les côtés correspondants de ces trois triangles se coupent, et forment trois nouveaux triangles aa' a'', bb' b'', cc' c''.

D'après cela, désignons par les lettres a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l, m, n, p, q, r, s, t, u, m', n', p', q', r', s', t', u' les vingt-sept droites : on formera sans peine le tableau suivant des quarante-cinq triangles, où la désignation des droites reste seule arbitraire :

abc, ade, afg, ahi, akl, bmn, bpq, brs, btu, $cm'n'$, $cp'q'$, $cr's'$, $ct'u'$, dmm', dpp', drr', dtt', enn', eqq', ess', euu', fmq', $fn'p$, fst', fur', gnp', $gm'q$, gru', gts', hms', $hn'r$, hqt', $hp'u$, inr', $im's$, itq', ipu', kmu', $kn't$, kqr', $kp's$, lnt', $lm'u$, $lq'r$, $ls'p$.

2. Étant données maintenant l'équation d'une surface du troisième degré et les équations d'une droite arbitraire, exprimons que la droite est contenue tout entière sur la surface. Nous obtiendrons des équations de condition qui permettront d'exprimer rationnellement

trois des paramètres de la droite en fonction du quatrième, qui sera déterminé par une équation du vingt-septième degré, dont chaque racine correspondra à l'une des vingt-sept droites. Nous conviendrons de désigner par a, b, c,... celles des racines de cette équation qui correspondent respectivement aux droites a, b, c,....

Le groupe G de l'équation considérée est exclusivement formé des substitutions qui n'altèrent pas la forme algébrique de la fonction suivante :

$$\varphi = abc + ade + \ldots + ls'p.$$

En effet, soient S une de ses substitutions, abc l'un des termes de φ. Les droites a, b, c forment un triangle, et cette propriété géométrique s'exprime par un système de relations analytiques

$$\varphi(a, b, c) = 0, \quad \psi(a, b, c) = 0, \ldots$$

entre les racines a, b, c. Les fonctions φ, ψ,..., ayant leur valeur nulle, et par suite rationnelle, ne sont pas altérées en valeur numérique par la substitution S. Si donc S remplace a, b, c par trois autres racines a', b', c', on aura

$$\varphi(a', b', c') = 0, \quad \psi(a', b', c') = 0, \ldots.$$

Donc les trois droites a', b', c' forment un triangle, et $a'b'c'$ sera l'un des termes de φ. Donc S transforme les termes de φ les uns dans les autres.

Réciproquement, si l'on admet que toutes les relations géométriques existant entre les vingt-sept droites peuvent se déduire de celles qui précèdent, ce qui est au moins fort probable, G contiendra toutes les substitutions qui n'altèrent pas φ.

Cette hypothèse étant admise, cherchons à déterminer le groupe G.

3. Soient μ le nombre des positions différentes où les substitutions de G permettent d'amener a; μ_1 celui des positions différentes où celles de ces substitutions qui laissent a immobile permettent d'amener b; μ_2 celui des positions différentes où celles des substitutions de G qui laissent a et b immobiles permettent de faire passer d; μ_3 celui des systèmes de positions que celles des substitutions de G

qui laissent a, b, d immobiles permettent d'assigner à m, p, r, t; μ_4 celui des substitutions de G qui laissent a, b, d, m, p, r, t immobiles. L'ordre de G sera évidemment égal à $\mu\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4$.

Or μ est au plus égal à 27, nombre total des lettres : μ_1 ne peut dépasser 10; car toute substitution de G qui laisse a immobile permute exclusivement entre eux les cinq termes de φ qui contiennent a; elle remplace donc b, qui figure dans ces termes, par l'une des dix racines b, c, d, e, f, g, h, i, k, l qui y figurent également. De même μ_2 ne peut dépasser 8; car toute substitution de G qui laisse a et b immobiles n'altérera pas le terme abc, qui seul dans φ est divisible par ab : donc elle laissera c invariable, et permutera exclusivement entre elles les huit racines d, e, f, g, h, i, k, l. D'autre part, μ_3 ne peut dépasser 24; car toute substitution de G qui ne déplace pas a, b, c, d n'altérera pas les coefficients de leurs diverses puissances dans la fonction φ. Elle laissera donc invariables e, $fg+hi+kl$, $mn+pq+rs+tu$, $m'n'+p'q'+r's'+t'u'$, $mm'+pp'+rr'+tt'$, $nn'+qq'+ss'+uu'$. Donc elle permute exclusivement entre elles les quatre racines m, p, r, t, communes aux deux expressions $mn+pq+rs+tu$, et $mm'+pp'+rr'+tt'$; ce qui ne peut avoir lieu que de vingt-quatre manières. Enfin l'on voit de même que μ_4 se réduit à l'unité.

4. Donc l'ordre de G ne peut dépasser 27.10.8.24. Mais il est égal à ce chiffre, car on vérifie de suite que G contient les substitutions

$$
\begin{aligned}
A &= (amu)(cnt)(gq'r')(is'p')u'ld)(m'ek),\\
B &= (bhk)(cil)(pt'r')(ns'u')(p'tr)(n'su),\\
C &= (dhk)(eil)(pus)(m's'u')(qtr)(n'r't'),\\
D &= (fil)(ghk)(n'u's')(mtr)(m't'r')(nus),\\
E &= (fhk)(gil)(p'r't')(q's'u')(prt)(qsu),\\
F &= (hk)(il)(r't')(s'u')(rt)(su),
\end{aligned}
$$

dont les cinq premières, combinées entre elles, permettent évidemment de faire succéder a à l'une quelconque des vingt-sept racines. Les substitutions B, C, D, E permettent ensuite, sans déplacer a, d'amener b à la place de l'une quelconque des dix racines b, c, d, e, f, g, h, i, k, l. Puis les substitutions C, D, E permettent, sans déplacer a, b

de faire succéder d à l'une quelconque des huit racines d, e, f, g, h, i, k, l. Les substitutions D, E, qui ne déplacent pas a, b, d, permettent de faire succéder m et p à deux quelconques des quatre racines m, p, r, t, ce qui donne pour ces racines douze systèmes de places distincts. Enfin la dernière substitution permet de permuter entre elles les deux racines restantes r et t, sans déplacer a, b, d, m, p.

Donc G ne contient pas moins de 27.10.8.12.2 substitutions; en outre, le groupe partiel H dérivé des seules substitutions A, B, C, D, E en contient au moins 27.10.8.12. Nous allons prouver : 1° qu'il en contient précisément ce nombre; 2° qu'il est permutable à toutes les substitutions de G.

5. Chacune des substitutions de G, transformant les uns dans les autres les divers termes de φ, équivaut à un certain déplacement opéré entre ces termes. Les divers déplacements ainsi équivalents aux diverses substitutions de G forment un groupe G_1, dont les substitutions correspondent une à une à celles de G. Celles des substitutions de G_1 qui résultent d'un nombre pair de transpositions entre les termes abc, ade,... forment un groupe partiel $\mathfrak{H}_1$ permutable aux substitutions de G_1. Les substitutions correspondantes du groupe G forment un groupe $\mathfrak{H}$, permutable aux substitutions de G. En effet, soient S, S' deux substitutions de $\mathfrak{H}$; S_1, S'_1 les substitutions correspondantes de $\mathfrak{H}_1$: $S_1 S'_1$ faisant partie de $\mathfrak{H}_1$, sa correspondante SS' fera partie de la suite $\mathfrak{H}$, laquelle formera ainsi un groupe. D'autre part, soient T une substitution quelconque de G, T_1 sa correspondante : $T_1^{-1} S_1 T_1$ faisant partie de $\mathfrak{H}_1$, sa correspondante $T^{-1}ST$ fera partie de $\mathfrak{H}$; donc T sera permutable à $\mathfrak{H}$.

Or on vérifie sans difficulté que chacune des substitutions A, B, C, D, E équivaut à un nombre pair de transpositions entre les termes abc, ade,.... Donc H, qui en dérive, est contenu dans $\mathfrak{H}$. Au contraire, la substitution F, équivalente à un nombre impair de transpositions, n'est pas contenue dans ce groupe. Donc $\mathfrak{H}$, dont l'ordre est un diviseur de celui de G, renferme au plus la moitié des substitutions de ce dernier groupe. Mais il contient H, qui en renferme la moitié : ces deux groupes sont donc identiques.

6. Les facteurs de composition de G sont évidemment 2 et les fac-

teurs de composition de H. Nous allons démontrer que ce dernier groupe est simple.

Considérons d'abord les racines a, b, c, d, m, m'. Elles forment deux termes, abc, dmm', de la fonction φ : de plus, a et d, b et m, c et m' se retrouvent ensemble dans trois autres termes, ade, bmn, $cm'n'$, de cette fonction. Chaque substitution de H, devant laisser φ invariable, fera succéder a, b, c, d, m, m' à un système de six racines α, β, γ, δ, μ, μ' jouissant de propriétés analogues. Réciproquement, soit α, β, γ, δ, μ, μ' un système quelconque de six racines jouissant de ces propriétés : H contiendra une substitution qui remplace ces racines par a, b, c, d, m, m'. En effet, si cela n'avait pas lieu, le nombre des systèmes tels que α, β, γ, δ, μ, μ' serait supérieur à celui des systèmes de places où les substitutions H permettent d'amener a, b, c, d, m, m'. Mais le premier de ces deux nombres ne peut dépasser $27.10.32$: car α peut être choisie de vingt-sept manières : cela fait, β, devant se rencontrer avec α dans un même terme de φ, ne peut être choisie que de dix manières ; et γ sera déterminée par là : on pourra ensuite prendre pour $\delta\mu\mu'$ l'un quelconque des trente-deux termes de φ qui n'ont aucune lettre commune avec $\alpha\beta\gamma$; et δ, μ, μ' seront alors déterminées sans ambiguïté par la condition de se trouver respectivement avec α, β, γ dans un même terme de φ. D'un autre côté, les substitutions H permettent de donner à a vingt-sept places distinctes, puis à b dix places distinctes, puis à d huit places distinctes, puis à m quatre places distinctes : le nombre des systèmes de places qu'elles permettent de donner à a, b, c, d, m, m' est donc au moins égal à $27.10.8.4$, et *à fortiori* au nombre des systèmes α, β, γ, δ, μ, μ'.

7. Soit maintenant I un groupe contenu dans H, et permutable à ses substitutions : nous allons prouver qu'il se confond avec H.

1° I *contient une substitution différente de l'unité et qui ne déplace pas* a. En effet, soit S une substitution de I, qui remplace a par une autre racine α : α pourra être l'une des racines b, c, d, e, f, g, h, i, k, l, ou l'une des seize autres racines.

Dans le premier cas, on peut supposer $\alpha = b$. Car H contient une substitution Σ qui remplace α par b sans déplacer a ; et I contiendra $\Sigma^{-1}S\Sigma$, qui remplace a par b. Soient donc $\alpha = b$. Si parmi les sub-

stitutions C, D, E, il en est une, T, non échangeable à S, I contiendra $S^{-1}.T^{-1}ST$, qui diffère de l'unité, et ne déplace pas a. Si, au contraire, S est échangeable à la fois à C, D, E, elle permutera exclusivement ensemble, d'une part les trois racines a, b, c que ces substitutions laissent immobiles, d'autre part les deux racines m, n, que D déplace et que C, E laissent immobiles. Si donc S ne laisse aucune racine immobile, elle permutera circulairement, d'une part les trois racines a, b, c, d'autre part les deux racines m et n : son carré ne se réduira pas à l'unité, et laissera m et n immobiles. Donc I contient dans tous les cas une substitution qui laisse quelque racine immobile. Soient S_1 cette substitution, β cette racine, Σ une des substitutions de H qui remplacent β par a : I contiendra $\Sigma^{-1}S_1\Sigma$, qui laisse a immobile.

Dans le second cas, on peut supposer $\alpha = m$. En effet, les substitutions dérivées de B, C, D, E permutent transitivement les seize racines m, n,... sans déplacer a. Soit Σ celle d'entre elles qui remplace α par m : I contiendra $\Sigma^{-1}S\Sigma$, qui remplace a par m. Soit donc $\alpha = m$. Si parmi les substitutions B, C, E, il est une, T, non échangeable à S, I contiendra la substitution $S^{-1}.T^{-1}ST$, qui ne déplace pas a. Dans le cas contraire, il faudra que S permute exclusivement ensemble, d'une part a et m, de l'autre les trois racines d, e, m' : cela posé, la démonstration s'achève comme au premier cas.

8. 2° I *contient une substitution, autre que l'unité, et qui laisse a, b immobiles*. Car soit S la substitution qui laisse a immobile, et dont on vient de démontrer l'existence : elle remplacera b par une des dix racines b, c, d, e, f, g, h, i, k, l qui se trouvent associées à a dans les termes de φ. Donc si S déplace b, elle le remplacera par c, ou par une des huit autres lettres.

Si S remplace b par c, il faudra, pour qu'elle n'altère pas φ, qu'elle n'altère pas le terme abc : donc elle remplacera c par b. Cela posé, si parmi les substitutions C, D, E, il en existe une, T, qui ne soit pas échangeable à S, I contiendra $S^{-1}.T^{-1}ST$, qui laisse a, b immobiles. Si au contraire S était échangeable à ces trois substitutions, elle permuterait exclusivement entre elles les racines m, n, que C, E laissent immobiles. Mais alors elle changerait le terme bmn en cmn, qui n'est pas un terme de φ : ce qui est absurde.

Si S remplace b par l'une, β, des huit racines $d, e, \ldots, l$, on voit comme tout à l'heure qu'on peut supposer $\beta = d$. Cela posé, si l'une T des substitutions D, E n'est pas échangeable à S, I contiendra $S^{-1}.T^{-1}ST$, qui laisse a et b immobiles. Dans le cas contraire, et sachant d'ailleurs que S permute exclusivement entre elles les dix racines $b, c, d, e, f, g, h, i, k, l$, associées à a dans les termes de φ, on vérifie sans peine qu'elle devra permuter exclusivement entre elles les deux racines f, g. Cela posé, I contiendra la transformée de S par EB^{-1}, laquelle laisse a immobile, et permute b et c exclusivement entre elles. On retombe ainsi sur un cas déjà discuté.

9. 3° I *contient une substitution autre que l'unité, et qui laisse a, b, d immobiles.* Car soit S la substitution qui laisse a et b immobiles et dont on vient de démontrer l'existence. N'altérant pas φ, elle n'altérera pas le terme abc : elle laissera donc c immobile. Si elle déplace d, elle le remplacera par e, ou par une des racines f, g, h, i, k, l.

Si S remplace d par e, il faudra, pour qu'elle n'altère pas φ, qu'elle n'altère pas le terme ade : donc elle remplacera réciproquement e par d. Cela posé, si parmi les substitutions D et E il en est une, T, qui ne soit pas échangeable à S, I contiendra $S^{-1}.T^{-1}ST$, qui laisse a, b, d immobiles. Dans le cas contraire, S permutera exclusivement entre elles les deux racines f, g. Si elle les laisse immobiles, I contiendra la transformée de S par EC^{-1}, laquelle laisse a, b, d immobiles. Si au contraire elle échange les deux racines f et g, il faudra, pour être échangeable à D et à E, qu'elle permute exclusivement entre elles les racines de chacun des systèmes ih, lk, $mnm'n'$, $pqp'q'$, $rsr's'$, $tut'u'$; et comme elle doit en outre transformer φ en elle-même on trouvera

$$S = (de)(fg)(hi)(kl)(mn)(pq)(rs)(tu)(m'n')(p'q')(r's')(t'u').$$

Cela posé, I contiendra la substitution $S^{-1}.B^{-1}SB = S'$, qui laisse a, d, f immobiles : et H contenant une substitution Σ qui remplace a, d, e, f, m, q' par a, b, c, d, m, m' (6), I contiendra $\Sigma^{-1}S'\Sigma$, qui laisse a, b, d immobiles.

Si S remplace d par l'une, β, des racines f, g, h, i, k, l, on peut supposer $\beta = h$. Cela posé, si S n'est pas échangeable à la substitution

$DE^{-1} = T$, I contiendra $S^{-1}.T^{-1}ST$, qui laisse a, b, d invariables. Si elle lui est échangeable, elle permutera exclusivement ensemble les racines d, e, h, i autres que a, b, c et que T laisse immobiles.

Or S remplace d par h : si elle remplace réciproquement h par d, on aura $S = DCU$, U étant une substitution de H qui laisse a, b, d, h immobiles. Mais les substitutions de H permettent d'amener a, b, d à $27.10.8$ systèmes de places distinctes : les substitutions D et E qui ne déplacent pas ces trois racines permettent d'amener ensuite h à six places distinctes. L'ordre de H est donc égal à $27.10.8.6.\nu$, ν étant le nombre des substitutions de ce groupe qui ne déplacent pas a, b, d, h. On déduit de là $\nu = 2$. Les deux seules substitutions que l'on puisse prendre pour U sont donc l'unité et la substitution T.

Soit en premier lieu $U = 1$, d'où $S = DC$. Cette substitution laisse immobiles a, b, c, p', q' : et H contenant une substitution Σ qui remplace c, p', q', a, d, e par a, b, c, d, m, m' (6), I contiendra $\Sigma^{-1}S\Sigma$, qui laisse a, b, d immobiles.

Soit en second lieu $U = T$. La substitution S laisse immobiles a, b, c, m, n : et H contenant une substitution Σ qui remplace b, m, n, a, d, e par a, b, c, d, m, m' (6), I contiendra $\Sigma^{-1}S\Sigma$, qui laisse a, b, d immobiles.

Supposons maintenant que S remplace h par e : I contiendra S^2, qui remplace d par e; et l'on retombe sur un cas déjà discuté.

Enfin, si h est remplacé par i, H contient une substitution Σ qui remplace a, h, i, b, m, n, par a, d, e, b, m, n (6) ; et I contenant $\Sigma^{-1}S\Sigma$, qui remplace d par e, sans déplacer a ni b, on retombe encore sur un cas déjà discuté.

10. 4° I *contient la substitution* E. En effet, soit S la substitution de I qui ne déplace pas a, b, d, et dont l'existence vient d'être démontrée. Si elle ne déplace pas m, elle se réduira à E ou à son carré, qui lui-même, étant élevé au carré, reproduira E. Si, au contraire, S déplace m, elle la remplace par l'une des trois racines p, r, t, et il est permis de supposer que c'est par t. On aura alors $S = VD$, V étant une substitution de H qui ne déplace pas a, b, d, m, et qui, par suite, se réduit à une puissance de E.

Supposons d'abord $V = 1$, d'où $S = D$. Cette substitution laisse im-

mobiles a, b, c, d, p, p' ; et H contenant une substitution Σ qui remplace ces racines par a, b, c, d, m, m' (6), I contiendra $\Sigma^{-1}S\Sigma$, qui laisse a, b, d, m immobiles, et se réduit à E ou à E^2.

Si $V = E$, S laissera immobiles a, b, c, d, r, r'; et H contenant une substitution Σ qui remplace ces racines par a, b, c, d, m, m' (6), I contiendra $\Sigma^{-1}S\Sigma$, qui se réduit à E ou à E^2.

Si enfin $V = E^2$, I contiendra la substitution $S^{-1}.A^{-1}SA = S'$, qui laisse b, r, s, p, d, p' immobiles; et H contenant une substitution Σ qui remplace ces lettres par a, b, c, d, m, m' (6), I contiendra $\Sigma^{-1}S'\Sigma$, qui se réduit à E ou à E^2.

11. 5° I *se confond avec* H : car il contient les puissances de E, et leurs transformées par les substitutions de H. Mais A, B, C, D, E, dont H dérive, font toutes partie du système de ces transformées : car A, par exemple, laisse immobiles b, r, s, p, u', f; mais H contient une substitution Σ qui remplace ces lettres par a, b, c, d, m, m' : la transformée de A par Σ laissera donc a, b, d, m immobiles, et se réduira à une puissance de E. Réciproquement, la transformée de cette dernière substitution par Σ^{-1} reproduira A.

12. L'équation aux vingt-sept droites a plusieurs réduites remarquables, signalées par divers géomètres.

1° Prenons, par exemple, pour inconnue de la question le plan du triangle formé par trois droites qui se coupent : ces triangles étant au nombre de quarante-cinq, on aura une équation du quarante-cinquième degré, équivalente à la proposée.

2° On peut déterminer de $\frac{45.32}{2}$ manières différentes un système de deux triangles qui n'aient aucune droite commune; à chaque semblable système correspond un triangle associé (**1**). Réciproquement, chaque système de trois triangles associés (*trièdre* de Steiner) correspond aux trois combinaisons deux à deux des triangles qui les forment. Le nombre total de ces trièdres sera donc $\frac{45.32}{2.3}$. On peut d'ailleurs les grouper par paires (*doubles trièdres*) en réunissant ensemble ceux qui contiennent les mêmes droites. Enfin les doubles trièdres peuvent être associés trois à trois, en réunissant ensemble ceux qui n'ont au-

cune droite commune. Prenant pour inconnue ce système de trois doubles trièdres, on aura une équation de degré $\frac{45.32}{2.3\ 2.3} = 40$, et équivalente à la proposée.

3° On peut déterminer de $\frac{27.16}{2}$ manières différentes une paire de droites qui ne se coupent pas. On peut d'ailleurs grouper ces paires six à six (*doubles-six* de Schläfli), de telle sorte que les droites d'une paire rencontrent chacune une droite de chaque autre paire du double-six. Les doubles-six dépendent donc d'une équation du degré $\frac{27.16}{2.6} = 36$, qui sera encore équivalente à la proposée.

Aucune réduite d'un degré inférieur au vingt-septième n'ayant été rencontrée jusqu'ici, on était fondé à penser qu'il est impossible de ramener la résolution de l'équation aux vingt-sept droites à celle d'une équation d'un degré inférieur. Nous allons en effet prouver cette proposition.

15. En effet, si un semblable abaissement de degré pouvait avoir lieu, il aurait lieu *à fortiori* après l'adjonction de la racine carrée qui réduit le groupe de la proposée à H. Supposons donc cette adjonction opérée : soient E_{27} l'équation aux vingt-sept droites, E_d celle des équations équivalentes dont le degré d est minimum : cette dernière équation sera irréductible et primitive. En effet, ses racines sont des fonctions rationnelles de celles de E_{27} (*Commentaire sur Galois,* cité p. 140). Si donc E_d n'était pas irréductible, elle se décomposerait en facteurs irréductibles de degré inférieur à d; et la résolution d'un seul de ces facteurs, faisant connaître des fonctions des racines de E_{27} qui auparavant n'étaient pas rationnelles, abaisserait le groupe de cette équation. Mais ce groupe H est simple : donc l'équation E_{27} serait complétement résolue; donc d ne serait pas le minimum supposé. D'autre part, si E_d n'était pas primitive, ses racines se grouperaient en systèmes, dépendant d'une équation dont le degré divise d, et la résolution de cette dernière équation, abaissant le groupe de E_{27}, la résoudrait complétement; donc, ici encore, d ne serait pas minimum.

Cela posé, l'ordre du groupe G_d de E_d est égal à celui du groupe de E_{27}, lequel est $\Omega = 27.10.8.6.2$ (**5**); mais il est divisible par d, et

divise $1.2\ldots d$. Donc si $d < 27$, il sera l'un des nombres 24, 20, 18, 16, 15, 12, 10, 9.

14. *Il n'existe aucune réduite de degré* 24, 18 *ou* 12. Car soit, pour fixer les idées, $d = 24$. Adjoignons à l'équation E_{24} une de ses racines, x : l'équation E_{23} qui détermine les vingt-trois racines restantes a son groupe G_{23} formé des substitutions qui laissent x immobile, et son ordre est égal à $\frac{\Omega}{24}$, nombre divisible par les nombres premiers 2, 3, 4. Les équations irréductibles dont elle est le produit ont donc leur ordre divisible par ces trois nombres premiers, à l'exclusion de tous les autres (Mém. précéd., **7**). Donc chacune de ces équations est du degré 5 au moins; en outre, aucune d'elles n'a pour degré 7, 8 ou 9, car son ordre ne pourrait être divisible par 5 sans l'être par 7 (Mém. précéd., **8**); enfin aucune d'elles n'a son degré divisible par un nombre premier autre que 2, 3, 5, car ce nombre premier diviserait son ordre. D'après cela, les seules hypothèses admissibles pour les degrés de ces facteurs irréductibles sont les suivantes : 18 et 5; 12, 6 et 5; 6, 6, 6 et 5.

Mais ces hypothèses elles-mêmes doivent être rejetées. Considérons, par exemple, la première (les mêmes raisonnements s'appliqueraient aux deux autres). Supposons que E_{23} soit le produit de deux facteurs E_{18} et E_5, ayant respectivement pour racines $y_1, \ldots, y_{18}$ et $x_1, \ldots, x_5$. L'ordre du groupe partiel $\Gamma^{(\mu)}$ formé par celles des substitutions de G_{24} qui laissent immobiles x et x_μ sera $\frac{\Omega}{24.5}$ et celui du groupe partiel $\Delta^{(\nu)}$ formé par celles de ces substitutions qui laissent immobiles x et y_ν sera $\frac{\Omega}{24.18}$. Soit maintenant S une substitution de G_{24}, qui remplace x par x_μ, et soient z une autre racine quelconque de E_{24}, u la racine que S lui fait succéder. Le groupe partiel formé par les substitutions qui laissent x_μ et u immobiles est le transformé par S de celui dont les substitutions laissent x et z immobiles : il contiendra donc $\frac{\Omega}{24.5}$ ou $\frac{\Omega}{24.18}$ substitutions, suivant que z sera l'une des racines $x_1, \ldots, x_5$ ou l'une des racines $y_1, \ldots, y_{18}$.

Or l'équation E_5 ayant son ordre divisible par 3, son groupe est trois

fois transitif (Mém. précéd., **8**); donc le groupe formé par celles des substitutions de G_{23} qui laissent immobiles deux quelconques de ses racines, x_μ et $x_{\mu'}$, a pour ordre $\frac{\Omega}{24.5.4}$. Le groupe formé par celles des substitutions de G_{24} qui jouissent de cette propriété, contenant celui-là, a pour ordre un multiple de ce nombre; donc il ne peut avoir pour ordre $\frac{\Omega}{24.18}$; donc les cinq racines telles, que le groupe partiel formé par celles des substitutions de G_{24} qui laissent immobile l'une d'elles en même temps que x_μ ait pour ordre $\frac{\Omega}{24.5}$, sont x, $x_1, \ldots, x_{\mu-1}$, $x_{\mu+1}, \ldots$ Mais S les fait succéder aux cinq racines $x_1, \ldots, x_5$, qui jouissent de la même propriété par rapport à x. Donc S permute exclusivement entre elles les six racines $x, x_1, \ldots, x_\mu$; d'où l'on déduirait, comme au n° **6** du Mémoire précédent, que E_{24} n'est pas primitive, ce qui est contraire au numéro précédent.

15. *Il n'existe aucune réduite de degré* 20, 15 *ou* 10. Car s'il existait, par exemple, une réduite du vingtième degré, le groupe $\mathfrak{H}$ formé par celles des substitutions de H qui laissent sa racine invariable aurait pour ordre $\frac{\Omega}{20}$: et le groupe K formé par celles des substitutions de H qui laissent immobile la racine a ayant pour ordre $\frac{\Omega}{27}$, l'ordre du groupe $\mathcal{K}$ formé par les substitutions communes à $\mathfrak{H}$ et à K serait $\frac{\Omega}{27.20}$, ou le vingtième de l'ordre de K (Mém. précéd., **3**).

Cela posé, les substitutions de K sont de la forme $A_\mu B_\mu$; $A_1, A_2, \ldots$ étant des substitutions partielles qui permutent ensemble les dix racines $b, c, d, e, f, g, h, i, k, l$, et $B_1, B_2, \ldots$ des substitutions opérées en même temps sur les seize autres racines : d'ailleurs on voit sans peine qu'aucune substitution de K (à l'exception de l'unité) ne laisse les dix premières racines immobiles à la fois. Soient en particulier $\mathcal{A}_1 \mathcal{B}_1$, $\mathcal{A}_2 \mathcal{B}_2, \ldots$ les substitutions de $\mathcal{K}$: le groupe $\mathcal{K}'$ formé par les substitutions partielles $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots$ opérées sur les dix premières lettres sera évidemment contenu dans le groupe K' formé par les substitutions partielles $A_1, A_2, \ldots$, et contiendra un vingtième du nombre total de ses substitutions.

Or on voit immédiatement que K′, dérivé des substitutions

$$(bhk)(cil), \quad (dhk)(eil), \quad (fil)(ghk), \quad (fhk)(gil),$$

contient : 1° les substitutions qui résultent d'un nombre pair de transpositions entre les cinq systèmes binaires bc, de, fg, hi, kl : 2° les substitutions qui ne déplacent pas les systèmes, mais permutent ensemble les deux racines dans un nombre pair de systèmes. On reconnaît en outre facilement que tout groupe tel que $\mathcal{K}'$, contenu dans K′ et contenant le vingtième de ses substitutions, contient le groupe L′ formé par ces dernières substitutions. D'ailleurs L′ est permutable aux substitutions de K′; et réciproquement tout groupe contenu dans K′ et permutable à ses substitutions est contenu dans L′.

Les substitutions de K et de K′ se correspondent évidemment une à une, de telle sorte qu'au produit de deux substitutions correspond le produit de sa correspondante. Le groupe $\mathcal{K}$, formé des substitutions de K dont le premier facteur appartient à $\mathcal{K}'$, contiendra le groupe L formé des substitutions de K dont le premier facteur appartient à L′ : donc $\mathfrak{H}$, qui contient $\mathcal{K}$, contiendra L. En outre, L sera permutable aux substitutions de K, et réciproquement tout groupe contenu dans K et permutable à ses substitutions sera contenu dans L.

Soient maintenant S une substitution quelconque de H; a_1 la racine par laquelle elle remplace a : elle transformera K, L en deux autres groupes K_1, L_1, qui jouent par rapport à la racine a_1 le même rôle que K, L par rapport à la racine a. Raisonnant comme précédemment, on voit que $\mathfrak{H}$ contiendra L_1. Donc $\mathfrak{H}$ contiendra les transformées des substitutions de L par une substitution quelconque de H; mais ce dernier groupe étant simple, ces transformées, combinées entre elles, le reproduisent tout entier. Donc $\mathfrak{H}$, au lieu de contenir, comme il le faudrait, le vingtième des substitutions de H, se confondrait avec lui.

16. *Il n'existe aucune réduite du degré* 16. S'il en existait une, E_{16}, soient E_{15} l'équation qui donne quinze de ses racines après l'adjonction de la seizième, G_{15} son groupe, O_{15} son ordre : on voit, comme au n° **14**, que si E_{15} n'est pas irréductible, elle se décompose en deux facteurs du dixième et du cinquième degré, ou en trois facteurs du cinquième.

Mais E_{15} ne peut se décomposer en trois facteurs du cinquième degré : car l'ordre de E_{16} diviserait $(1.2...5)^3.16$ et ne pourrait être égal à Ω.

Supposons maintenant $E_{15} = E_{10}E_5$. L'équation du cinquième degré E_5, ayant son ordre O_5 divisible par 3, a son groupe G_5 trois fois transitif : d'ailleurs O_5, divisant $\frac{\Omega}{16}$, n'est pas divisible par 8; donc le groupe G_5 est alterné. Cela posé, soient G_{10} le groupe de E_{10}, O_{10} son ordre : on aura évidemment $\frac{\Omega}{16} = O_{15} = O_{10}P$, P étant l'ordre du groupe partiel Γ formé par celles des substitutions de G_{15} qui ne déplacent pas les racines de E_{10}. Ce dernier groupe est évidemment contenu dans G_5 et permutable à ses substitutions; et le groupe G_5 étant simple, Γ se confond avec lui ou ne contient d'autre substitution que l'unité. Mais si Γ se confondait avec G, P serait divisible par 5 et $O_{10}P$ par 25, tandis que $\frac{\Omega}{16}$ ne l'est pas. Il faut donc admettre la seconde hypothèse, d'où $P = 1$, $\frac{\Omega}{16} = O_{10}$.

Cela posé, adjoignons à l'équation E_{10} une de ses racines, δ : l'équation E_9 qui détermine les autres aura pour ordre $\frac{\Omega}{16.10} = 2.3^4$. Il faut évidemment pour cela qu'elle soit irréductible, mais que l'équation E_8 obtenue en s'adjoignant une nouvelle racine se décompose en facteurs irréductibles ayant chacun pour degré 1, 2, 3 ou 6. L'ordre de E_8 devant être égal à 2.3^2, l'un au moins de ces facteurs aura pour degré 3 ou 6, et il est aisé de voir que quelque hypothèse qu'on fasse sur les degrés de ces facteurs, l'équation E_9 sera non primitive (Mémoire précédent, n° 5). Cela posé, soient $\alpha, \beta, \gamma; \alpha', \beta', \gamma'; \alpha'', \beta'', \gamma''$ ses racines : on voit immédiatement que l'ordre de E_9 ne peut être égal à 2.3^4 que si son groupe G_9 est dérivé des substitutions

$$(\alpha\beta\gamma),\quad (\alpha'\beta'\gamma'),\quad (\alpha''\beta''\gamma''),\quad (\alpha\alpha')(\beta\beta')(\gamma\gamma'),\quad (\alpha\alpha'')(\beta\beta'')(\gamma\gamma'').$$

Il est facile maintenant de prouver l'impossibilité du groupe G_{10}. Ce groupe, étant deux fois transitif, contiendrait une substitution S qui remplace α, β, γ par δ, β, et par une autre racine ε (différente

ou non de α et de γ) : et G_{10} contiendrait la substitution $(\delta\beta\varepsilon)$, transformée de $(\alpha\beta\gamma)$ par S. Soient maintenant ζ une autre racine quelconque; T une substitution de G_{10} qui remplace ζ par δ; $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \varepsilon_1$ les racines que T fait succéder à $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$: les substitutions $(\delta_1\beta_1\varepsilon_1)$, $(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$, transformées de $(\delta\beta\varepsilon)$, $(\alpha\beta\gamma)$ par T, ne déplaçant pas δ, appartiendraient à G_9; résultat absurde, car le groupe dérivé de ces deux substitutions, alterné par rapport à $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \varepsilon_1$, ayant son ordre divisible par 4, ne peut être contenu dans G_9, dont l'ordre est $2 . 3^4$.

17. Supposons maintenant l'équation E_{15} irréductible et primitive. Adjoignons-lui une de ses racines, x; l'équation E_{14} qui donne les racines restantes aurait pour ordre $O_{14} = \frac{\Omega}{16.15} = 4.27$, et se décomposerait en facteurs irréductibles dont l'ordre divise ce nombre, et admet les diviseurs premiers 2 et 3. On aurait donc deux facteurs du quatrième degré avec un du sixième, ou avec deux du troisième.

1° Ces deux hypothèses doivent être rejetées. En effet, considérons d'abord la première. Soient E'_4, E''_4, E_6 les trois facteurs de E_{14}. L'ordre de E_6 étant premier à 5, l'équation E_5 qui s'en déduit par l'adjonction d'une de ses racines sera décomposable en plusieurs facteurs irréductibles, et de quelque manière qu'on imagine que cette décomposition ait lieu, on arrivera à cette conclusion que E_6 n'est pas primitive (Mémoire précédent, n° 5). Les racines se grouperont donc deux par deux en trois systèmes, ou trois à trois en deux systèmes.

Le premier cas est inadmissible : car O_{14} serait divisible par 8 ou ne le serait pas par 27, et, par suite, ne saurait se confondre avec $\frac{\Omega}{16.15}$. En effet, O_{14} est égal au produit de O_6, ordre de E_6, par P, ordre du groupe Γ formé par celles des substitutions de G_{14} qui ne déplacent pas les racines de E_6. Chaque substitution de ce dernier groupe est le produit de deux substitutions partielles opérées respectivement sur les racines de E'_4 et de E''_4 : et son ordre est évidemment divisible par l'ordre P' du groupe Γ' formé par les premières substitutions partielles. Mais Γ' est contenu dans le groupe G'_4 de l'équation E'_4 et évidemment permutable à ses substitutions. D'ailleurs G'_4 ayant son ordre divisible

par 4 et par 3, et non par 8, est alterné; et l'on voit immédiatement qu'il y a trois groupes contenus dans G'_4 et permutables à ses substitutions, lesquels ont respectivement pour ordre 12, 4 et 1. Donc $P' = 12$, 4 ou 1. Mais O_6 étant divisible par 6, $O_{14} = O_6 P$ sera divisible par 8 si $P' > 1$. On doit donc admettre que Γ' se réduit à la seule substitution 1. On voit de même que le groupe Γ'' formé par les secondes substitutions partielles se réduit à la seule substitution 1. Mais alors on aura $O_{14} = O_6$, et ce nombre divisant $1.2.3.(1.2)^3$ ne sera pas divisible par 27.

Supposons, au contraire, que les racines de E_6 se groupent trois à trois en deux systèmes. On aura $O_{14} = 2R$, R étant l'ordre du groupe I formé par celles des substitutions de G_{14} qui ne déplacent pas ces deux systèmes. Mais chaque substitution de I est le produit de trois substitutions partielles, opérées respectivement sur les racines de E'_4, de E''_4 et de E_6. Soit I' le groupe formé par les premières substitutions partielles; il est clair qu'il contiendra au moins six des douze substitutions du groupe alterné G'_4 : d'ailleurs I étant permutable aux substitutions de G_{14}, I' le sera *à fortiori* à celles de G'_4; donc I' contient les douze substitutions de G'_4. Cela posé, R étant évidemment divisible par l'ordre de I', O_{14} le sera par 8, ce qui est inadmissible.

2° Il reste à examiner le cas où E_{14} se décomposerait en deux facteurs du quatrième et deux du troisième degré. Mais l'impossibilité de cette hypothèse (l'équation E_{15} étant supposée primitive) se démontre par des considérations toutes semblables à celles du n° **14**.

18. Il nous reste à démontrer que E_{15} ne peut être à la fois irréductible et non primitive. Si cela avait lieu, ses racines se grouperaient cinq à cinq en trois systèmes, ou trois à trois en cinq systèmes. Examinons successivement ces deux cas.

1° Si les racines de E_{15} formaient trois systèmes, son groupe G_{15} aurait pour ordre mP, m étant le nombre de positions différentes que ses substitutions donnent aux systèmes, et P l'ordre du groupe I formé par celles des substitutions de G_{15} qui ne déplacent pas ces systèmes. Ces dernières substitutions sont de la forme $A_1^{(\mu)} A_2^{(\mu)} A_3^{(\mu)}$; A'_1, A''_1,... étant des substitutions partielles opérées sur les racines du premier système; A'_2, A''_2,..., et A'_3, A''_3,... d'autres substitutions partielles

opérées en même temps sur les racines du second et du troisième système.

Soient respectivement I_1, I_2, I_3 les groupes formés par les substitutions partielles A'_1, $A''_1, \ldots$; A'_2, $A''_2, \ldots$; A'_3, $A''_3, \ldots$; $B'_2 B'_3$, $B''_2 B''_3, \ldots$ celles des substitutions de I qui ne déplacent que les racines des deux derniers systèmes; K le groupe formé par ces substitutions; K_2 le groupe formé par les substitutions partielles B'_2, $B''_2, \ldots$; soit enfin L le groupe formé par celles des substitutions de I qui ne déplacent que les racines du troisième système. Il est clair que K est contenu dans I et permutable à ses substitutions : donc *à fortiori* K_2 est contenu dans I_2 et permutable à ses substitutions. De même L est contenu dans I_3, et permutable à ses substitutions.

Les groupes I_1, I_2, I_3 ont leur ordre divisible par 5. En effet, l'ordre de I est évidemment égal au produit des ordres p, q, r des groupes I_1, K_2, L. Mais E_{15} a pour ordre $O_{15} = \frac{\Omega}{16} = 2^2.3^4.5 = mpqr$. D'ailleurs m divise 1.2.3; donc un des nombres, p, q, r, et un seul, est divisible par 5. Supposons que q, par exemple, soit divisible par 5 : I_2, contenant K_2, aura *à fortiori* son ordre divisible par 5. D'ailleurs G_{15} contient une substitution S qui remplace les racines du second système par celles du premier : cette substitution transforme I_2 en I_1; donc p, ordre de I_1, est divisible par 5. De même pour l'ordre de I_3.

Le nombre p étant divisible par 5, comme on vient de le voir, q et r ne le seront pas. Ils se réduiront donc à l'unité; car si q, par exemple, était > 1, les racines du second système pourraient être partagées en classes, en réunissant ensemble celles que les substitutions de K_2 permutent entre elles : cela posé, les substitutions de I_2, étant permutables à K_2, permuteraient exclusivement entre elles les racines appartenant aux classes les moins nombreuses; donc I_2 ne serait pas transitif, et son ordre ne pourrait être divisible par 5.

Soit donc $q = r = 1$: O_{15}, se réduisant à mp, divisera 1.2.3.1.2.3.4.5 et ne pourra être égal à $\frac{\Omega}{16}$, comme cela devrait être.

19. 2° Si les racines de E_{15} formaient cinq systèmes, $\frac{\Omega}{16} = O_{15}$ serait encore égal à mP, m étant le nombre de positions différentes que les

substitutions de G_{15} donnent aux systèmes, et P l'ordre du groupe I.

Supposons d'abord que m soit divisible par 3 : les déplacements des systèmes formeront un groupe de degré 5, transitif et dont l'ordre est divisible par 3 : ce groupe sera donc trois fois transitif; et son ordre n'étant pas divisible par 8, il sera alterné. On aura donc $m = 5.4.3$, d'où $P = 27$. Ce résultat est impossible. En effet, chaque substitution de I serait de la forme $A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} A_3^{\alpha_3} A_4^{\alpha_4} A_5^{\alpha_5}$; $A_1, \ldots, A_5$ désignant des substitutions circulaires effectuées respectivement entre les racines du premier, ..., du cinquième système, et $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$ des entiers nuls ou positifs; et l'on aurait $P = nQ$, n étant le nombre de systèmes de valeurs non congrues suivant le module 3 que prennent, dans les substitutions de I, les entiers α_1, α_2, lequel divise 9, et Q le nombre des substitutions de I qui se réduisent à la forme $A_3^{\alpha_3} A_4^{\alpha_4} A_5^{\alpha_5}$. Donc $Q > 1$, et I, contient une substitution S de cette dernière forme, autre que l'unité. Supposons, pour plus de généralité que dans S les valeurs de α_3, α_4 diffèrent de o (mod. 3). Transformons cette substitution par celles de G_{15} qui laissent immobiles les troisième et quatrième systèmes, en remplaçant le cinquième par le premier et par le second. On obtiendra deux transformées telles que $A_3^{\beta_3} A_4^{\beta_4} A_1^{\beta_1}$, $A_3^{\gamma_3} A_4^{\gamma_4} A_2^{\gamma_2}$; β_3, β_4, γ_3. γ_4 étant des entiers différents de o (mod. 3). Cela posé, deux des trois rapports $\frac{\alpha_3}{\alpha_4}$, $\frac{\beta_3}{\beta_4}$, $\frac{\gamma_3}{\gamma_4}$ seront nécessairement congrus par rapport à 3. Soit, par exemple, $\frac{\beta_3}{\beta_4} \equiv \frac{\gamma_3}{\gamma_4}$. Les deux dernières substitutions ci-dessus, combinées entre elles, donneront la suivante : $A_1^{\beta_1} A_2^{-\gamma_2 \frac{\beta_3}{\gamma_3}}$, qui ne déplace plus que les racines de deux systèmes. Cette substitution, transformée par celles de G_{15}, donnera des substitutions déplaçant les racines de deux systèmes quelconques. Cela posé, soient respectivement $P_1, P_2, \ldots$, les ordres des groupes $I_1, I_2, \ldots$, formés par celles des substitutions de I qui laissent immobiles les racines du premier système, celles des deux premiers systèmes, etc., on aura

$$P = 3P_1 = 3^2 P_2 = 3^3 P_3 = 3^4 P_4 > 27.$$

Supposons enfin m non divisible par 3. On a

$$P = \varepsilon_1 P_1 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 P_2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 P_3,$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ étant des diviseurs de $1.2.3$. Mais $P = \frac{\Omega}{16m}$ est divisible par 3^4 : donc P_3 est divisible par 3, et I_3 contient une substitution S, autre que l'unité, et de la forme $A_4^{\alpha_4}A_5^{\alpha_5}$. Les entiers α_4, α_5 différeront de o (mod. 3); car si l'on avait $\alpha_5 \equiv 0$, I contiendrait les transformées de S par les substitutions de G_{15}, transformées dont les puissances, combinées entre elles, reproduisent les 3^5 substitutions de la forme $A_1^{\alpha_1}\ldots A_5^{\alpha_5}$. Donc P, et, par suite, $\frac{\Omega}{16}$ serait divisible par 3^5, ce qui n'a pas lieu,

On peut évidemment, sans nuire à la généralité de la question, supposer $\alpha_4 \equiv 1$, $\alpha_5 \equiv 2$. On voit de même que I contient une substitution de la forme $A_5^{\beta_5}A_1^{\beta_1}$, β_5 et β_1 différant de o (mod. 3). Cette substitution (ou son carré si $\beta_2 \equiv 2$) sera de la forme $A_5 A_1^{\gamma_1}$, et l'on peut supposer $\gamma_1 \equiv 2$. On voit de même que I contient les substitutions $A_1 A_2^2$, $A_2 A_3^2$, $A_3 A_4^{\delta_4}$, δ_4 étant $\gtrless 0$ (mod. 3). Mais ces substitutions, combinées entre elles, donnent la substitution $A_4^{1+\delta_4}$, que I doit contenir, ce qui ne serait pas possible, d'après ce qui précède, si δ_4 ne se réduisait pas à 2. Donc I contient les substitutions $A_1 A_2^2$, $A_2 A_3^2, \ldots$, $A_5 A_1^2$, et en général toutes celles de la forme $A_1^{\alpha_1}\ldots A_5^{\alpha_5}$ pour lesquelles $\alpha_1 + \ldots + \alpha_5 \equiv 0$, lesquelles dérivent de celles-là.

Le groupe G_{15} ne peut contenir aucune autre substitution d'ordre 3. Car cette substitution, ne déplaçant pas les systèmes, par hypothèse, serait de la forme $A_1^{\alpha_1}\ldots A_5^{\alpha_5}$, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_5$ étant $\gtrless 0$ (mod. 5); et en la combinant aux précédentes, on aurait un groupe d'ordre 3^5 contenu dans G_{15}, ce qui est impossible.

Soient maintenant $a_1, b_1, c_1, \ldots, a_5, b_5, c_5$ les racines de E_{15}; x la dernière racine de E_{16}. Le groupe G_{16} de E_{16}, étant deux fois transitif, contient une substitution S qui remplace a_1 et b_1 par x et a_1 : et la transformée de $A_1 A_2^2 = (a_1 b_1 c_1)(a_2 c_2 b_2)$ par S sera de la forme $T = (x a_1 y)(zuv)$, y, z, u, v étant les racines que S fait succéder à c_1, a_2, c_2, b_2.

Supposons d'abord que y soit une des racines b_1, c_1, par exemple, b_1. Les substitutions $A_2^{\alpha_2}\ldots A_5^{\alpha_5}$ d'ordre 3 contenus dans I et qui laissent x, a_1, b_1 immobiles forment un groupe évidemment permutable à T, ou, ce qui revient au même, à la substitution partielle (zuv). Il faut pour cela que (zuv) soit une puissance de l'une des substitutions

$A_2, \ldots, A_5$, de A_2 par exemple. Cela posé, la substitution $A_1 A_2^2$, multipliée par T ou par T^2, donnera une substitution U qui laisse immobiles toutes les racines autres que a_1, b_1, c_1, x.

Supposons, au contraire, que y soit une autre racine, telle que a_2; (zuv) sera permutable à celles des substitutions de I qui sont de la forme $A_3^{\alpha_3} A_4^{\alpha_4} A_5^{\alpha_5}$, et, par suite, sera une puissance de l'une des substitutions A_3, A_4, A_5, ou permutera entre elles trois des racines b_1, c_1, b_2, c_2. Mais dans ce dernier cas, le produit de S par $A_1 A_2^2$ ou par son carré donne une substitution d'ordre 7, ce qui est inadmissible, Ω n'étant pas divisible par 7. Admettons donc que (zuv) soit une puissance de A_3 : S, combinée avec $A_2 A_3^2$, donne une substitution U qui laisse immobiles toutes les racines, sauf a_1, a_2, b_2, c_2, x.

Donc G_{16} contiendra dans tous les cas une substitution U qui déplace cinq racines au plus. Soit x' une des racines que U laisse immobiles : G_{16} contient une substitution V qui remplace x' par x; $V^{-1} UV = W$ ne déplace encore que cinq racines, et laissant x immobile, appartient à G_{15}. Mais toute substitution qui déplace les systèmes déplace au moins deux d'entre eux, soit six racines : donc W appartient à I et remplace les lettres de chaque système les unes par les autres. Mais si W déplace les trois lettres d'un même système, le premier, par exemple, son carré sera une puissance de A_1, qui ne peut être contenue dans I, ainsi qu'on l'a déjà vu. Si, au contraire, W laisse dans chaque système une racine au moins immobile, on pourra supposer

$$W = (a_1 b_1), \quad = (a_1 b_1)(a_2 b_2) \quad \text{ou} \quad = (a_1 b_1)(a_2 c_2).$$

Dans les trois cas, cette substitution, jointe à celles de la forme $A_1^{\alpha_1} \ldots A_5^{\alpha_5}$, que contient I, et à ses transformées par celles-ci, permettra de permuter ensemble d'une manière quelconque les trois racines a_1, b_1, c_1, puis, en laissant celles-là immobiles, de permuter ensemble a_2, b_2, c_2, puis de permuter entre elles a_3, b_3, c_3. Donc P serait égal à $(1.2.3)^3 P_3$, et divisible par 8, ce qui est inadmissible.

Sur une propriété des systèmes qui ont un plan invariable;

Par M. R. RADAU.

Lorsqu'on aborde l'intégration des équations différentielles de la dynamique, certaines simplifications, basées sur la nature particulière de ces équations, s'offrent comme d'elles-mêmes. En premier lieu, si les forces sont indépendantes du temps, on peut exclure la différentielle dt des $6n$ équations du premier ordre qui représentent le mouvement de n points matériels, et les réduire ainsi à $6n - 1$ équations simultanées entre $6n$ variables. Le temps s'obtient alors par une quadrature après l'intégration du système de $6n - 1$ équations.

Ensuite, dans les problèmes où les forces ne dépendent que des distances mutuelles des mobiles, on peut faire abstraction de la position absolue du système par rapport à un point fixe dans l'espace, et se contenter d'en considérer la *configuration* autour d'un point mobile, lié au système. On peut, par exemple, prendre l'origine des coordonnées au centre de gravité, en le supposant fixe; cela ne change rien à la forme des équations du mouvement, seulement on gagne ainsi trois équations de condition entre les coordonnées, et trois équations semblables entre les vitesses, de sorte qu'on peut éliminer six variables et diminuer de six le nombre des équations différentielles. En outre, le mouvement de translation du centre de gravité est connu par trois intégrales, qui nous apprennent qu'il est rectiligne et uniforme.

Au lieu de rapporter tous les points du système au centre de gravité, on peut aussi les rapporter à un des points que j'ai appelés *points canoniques*. Ce sont des centres de gravité de deux masses fictives, l'une égale à la racine carrée de la masse totale du système et située au centre de gravité réel, l'autre égale à la racine carrée de la masse de l'un des corps et prenant la place de ce corps. Ce dernier se trouve

dès lors exclu des équations différentielles; le mouvement des $n-1$ *planètes* a lieu autour du point canonique comme autour d'un centre d'attraction fixe (en ce sens que la fonction des forces renferme maintenant les distances des planètes à l'origine des coordonnées). En résumé, quand les forces et les liaisons des points ne dépendent que des distances mutuelles de ces derniers, le nombre des équations différentielles se réduit à $6n-6$, ou bien à $6n-7$, si nous éliminons dt.

Toutes les fois que les forces en jeu dans le système sont les dérivées partielles d'une fonction qui ne renferme pas le temps, nous avons une intégrale indépendante des équations de condition : l'intégrale des forces vives. Elle existe pour les systèmes libres ou sollicités par les attractions de centres fixes, et elle permet d'abaisser le nombre des équations différentielles d'une unité.

Quand les forces et les liaisons du système n'éprouvent aucun changement par une rotation d'ensemble de tous les points autour d'une droite fixe, que j'appellerai l'*axe polaire*, nous avons toujours une intégrale des aires : la somme des vitesses aréolaires autour du pôle fixe est une constante. Ceci s'applique au cas où nous avons une ligne droite contenant des centres fixes. Dans le cas d'un système libre, le théorème a lieu pour une droite fixe quelconque, ce qui donne trois intégrales des aires. J'appellerai ici *axe polaire* celui qui correspond au maximum de la somme des aires, c'est-à-dire la normale au *plan invariable*. Pour un axe quelconque situé dans le plan invariable la somme des aires est nulle.

Je montrerai qu'*une intégrale des aires et l'intégrale des forces vives valent ensemble trois intégrales*, en ce sens qu'elles permettent d'éliminer trois variables, ou de réduire de trois unités le nombre des équations différentielles du problème. S'il existe une seconde intégrale des aires, on sait que la troisième existe aussi, puisque $(\alpha, \beta) = \gamma$, si nous désignons par α, β, γ les sommes des vitesses aréolaires autour de trois axes rectangulaires, et par (α, β) la fonction de Poisson. Nous pouvons alors éliminer cinq variables, et le nombre des équations différentielles tombe de $6n-7$ à $6n-12$, si le principe du centre de gravité s'applique également.

Cette propriété curieuse des intégrales des aires peut s'énoncer géométriquement comme il suit. Toutes les fois qu'un système a un pôle

invariable, c'est-à-dire que les forces et les liaisons des points sont indépendantes de l'orientation du système autour d'une droite fixe, on peut rapporter le mouvement à un méridien mobile avec le système. La position absolue du plan mobile par rapport à un méridien fixe se détermine par une quadrature après coup, si l'on parvient à intégrer les équations différentielles du mouvement relatif. Or ces dernières renferment deux variables de moins que les équations du mouvement absolu, car le méridien mobile se détermine par une équation de condition, $f = 0$, entre les coordonnées, et cette équation en donne une seconde, $\frac{df}{dt} = 0$, qui existe entre les coordonnées et les vitesses. Ces deux équations permettent d'éliminer une coordonnée et une vitesse; on peut, par exemple, faire passer le méridien mobile par l'un des corps du système, ce qui donne $y_0 = 0$, $\frac{dy_0}{dt} = 0$. En échange on n'introduit qu'une seule variable nouvelle, la rotation du méridien mobile, qui s'élimine par l'intégrale des aires. En effet, prenons l'axe polaire pour axe des z, le plan invariable pour plan des x, y, et l'intersection de ce plan avec le méridien mobile, ou la *ligne des nœuds*, pour axe des x; soit Ω la longitude du nœud, ou l'angle que le méridien mobile fait avec un méridien fixe, et soit $\Omega' = \frac{d\Omega}{dt}$ sa vitesse de rotation autour du pôle. Les trois composantes de la vitesse d'un point matériel libre seront

$$x' - y\Omega', \quad y' + x\Omega', \quad z',$$

et la force vive du système deviendra

$$2T = \Sigma m(x' - y\Omega')^2 + \Sigma m(y' + x\Omega')^2 + \Sigma m z'^2.$$

Sans modifier cette expression d'une manière essentielle, nous pourrons supposer que les variables ont été réduites au plus petit nombre possible. Au lieu de prendre l'origine au centre de gravité et d'éliminer les coordonnées de l'un des corps, on peut par exemple en exclure un directement, en prenant pour origine des coordonnées un point canonique; cela ne changera rien ni à la forme de T, ni à la situation du pôle

invariable. Pour déterminer le méridien mobile, on a l'équation $f = 0$, qui donne $\Sigma(f'_x x' + f'_y y' + f'_z z') = 0$, et si nous éliminons une coordonnée et une vitesse à l'aide de ces deux équations, T reste toujours une fonction homogène du second degré des variables x', y', z', Ω'. La variable Ω n'existe ni dans T, ni dans la fonction des forces U. Par conséquent, si l'on fait

$$T - U = H,$$

$$\frac{dT}{dx'} = p, \quad \frac{dT}{dy'} = q, \quad \frac{dT}{dz'} = r, \quad \frac{dT}{d\Omega'} = K,$$

et qu'on remplace dans T les variables x', y', z', Ω' par les variables p, q, r, K, on aura, par la méthode d'Hamilton, le système canonique d'équations différentielles :

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \frac{dH}{dp}, & \frac{dp}{dt} &= -\frac{dH}{dx},\\
\frac{dy}{dt} &= \frac{dH}{dq}, & \frac{dq}{dt} &= -\frac{dH}{dy},\\
\frac{dz}{dt} &= \frac{dH}{dr}, & \frac{dr}{dt} &= -\frac{dH}{dz},\\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{dH}{dK}, & \frac{dK}{dt} &= -\frac{dH}{d\Omega} = 0.
\end{aligned}$$

L'équation $\frac{dK}{dt} = 0$ donne l'intégrale $K = \text{const.}$; c'est l'intégrale des aires. En prenant les dérivées partielles de H par rapport aux variables x, y, z, p, q, r, on traite déjà K comme une constante; on ne changera donc rien aux équations différentielles du mouvement, si l'on prend de suite pour K la constante des aires. Ces équations se réduisent alors à $6n - 8$ équations différentielles entre les variables x, y, z, p, q, r, avec la quadrature

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{dH}{dK}.$$

Deux autres intégrales des aires, l'intégrale des forces vives, $H = \text{const.}$, et l'élimination de dt réduisent ensuite le nombre des équations à $6n - 12$.

Il est donc démontré que l'on peut former les équations du mouvement en faisant abstraction non-seulement de la translation dans l'espace d'un point mobile, fonction des coordonnées, mais encore de la rotation d'un plan mobile qui fait également partie du système.

Cette idée se trouve déjà énoncée à la dernière page du Mémoire de M. Sylvester, intitulé *On the motion of a rigid body acted on by no external forces* [*]. « Le problème qui vient d'être traité, dit M. Sylvester, constitue peut-être le cas le plus simple d'une classe bien définie de questions de dynamique auxquelles s'applique une méthode spéciale qui consiste à renvoyer la recherche du déplacement absolu après la détermination du déplacement autour d'une droite fixe. Les trois problèmes qui offrent les exemples les plus importants de ce genre de questions, et qui forment pour ainsi dire un groupe naturel, sont : celui de la rotation d'un corps libre, celui d'un corps attiré par deux centres fixes, et le problème des trois corps. Dans le premier et le troisième, la droite fixe est la normale au plan invariable; dans le second, c'est la ligne qui joint les centres fixes.... Dans le problème des trois corps, on comprend *à priori* que, pour recourir aux procédés de déformation employés par Jacobi et tous ceux qui sont venus après lui, on pourrait gagner, c'est-à-dire économiser une intégrale, en formant un système d'équations d'où la position absolue de l'intersection du plan des trois corps avec le plan invariable serait exclue. Ce résultat équivaudrait, par le fait, à ce qu'on appelle avec Jacobi l'*élimination des nœuds;* mais, dans la méthode de Jacobi, la ligne des nœuds est l'intersection de deux orbites instantanées qui se coupent dans le plan invariable, tandis qu'ici c'est l'intersection du plan invariable avec le plan des trois corps....

» Le procédé par lequel l'élément relatif à la position absolue est pour ainsi dire écarté dès le principe n'est pas un procédé d'élimination à proprement parler, ou, du moins, nous ne sommes pas obligés de le reconnaître pour tel. On appelle *élimination* l'opération qui consiste à chasser une variable d'un système d'équations où elle était déjà entrée; mais ce qu'il y a à faire dans le cas actuel, ce n'est pas de

---

[*] *Philosophical Transactions*, 1866.

faire disparaître une variable, mais de l'exclure dès le commencement : c'est, pour le dire en un mot, un procédé d'*ab-limination* qui s'applique ici. »

M. Sylvester termine par l'annonce d'un Mémoire dans lequel il se propose de traiter à ce point de vue le problème des trois corps; mais il n'a rien publié sur cette question.

La méthode de Jacobi à laquelle M. Sylvester fait allusion dans ce passage consiste à substituer aux trois corps réels deux corps fictifs et à introduire comme variables les inclinaisons des orbites que ces corps décrivent autour du centre de gravité du système. Les orbites se coupent dans le plan invariable, la longitude du nœud se détermine par une quadrature, et les équations finales de Jacobi ne représentent au fond que six équations du premier ordre. Il dit lui-même : cinq du premier et une du second ordre, mais on s'assure facilement que son système peut être mis sous la forme de six équations du premier ordre seulement. Il ne paraît pas que Jacobi ait jamais essayé de généraliser ce résultat. Son Mémoire date de 1842.

L'élimination du nœud du plan des trois corps a été obtenue quatorze ans plus tard (en 1856) par Edmond Bour. Ce dernier prend pour point de départ la transformation de Jacobi, et une analyse fort compliquée le conduit à deux systèmes canoniques de huit variables, dont chacun peut servir à déterminer le mouvement des deux corps fictifs dans le plan des trois corps. Dans le second figurent les rayons vecteurs (q_1, q_2) et les vitesses radiales (p_1, p_2), les azimuts (q_3, q_4) des vecteurs, comptés à partir du nœud, et les vitesses aréolaires dans le plan des trois corps (p_3, p_4). Dans le premier système de Bour, les variables q_3, q_4, p_3, p_4 sont remplacées par leurs sommes et différences (n_3, n_4, l_3, l_4), c'est-à-dire par l'angle compris entre les vecteurs, l'azimut de la bissectrice de cet angle, la différence des vitesses aréolaires et leur somme, qui dépend du cosinus de l'inclinaison. Ce sont les variables ω, φ, q, $\cos\theta$, de M. Brioschi, qui arrive au même système en considérant la bissectrice de l'angle ω comme un axe mobile et en éliminant le nœud par les intégrales des aires; seulement, M. Brioschi ne s'aperçoit pas que les variables φ, $\cos\theta$ sont conjuguées [*].

[*] Note présentée à l'Académie des Sciences le 6 avril 1868.

I.

Je ferai voir, dans ce qui suit, comment avec une seule intégrale des aires l'élimination des nœuds peut s'obtenir directement, en déterminant un méridien mobile par une équation quelconque $f = 0$. Je montrerai ensuite comment, lorsqu'on dispose de trois intégrales des aires, on peut employer trois axes mobiles déterminés par trois équations finies : par exemple, les trois axes principaux d'inertie. Les trois équations de condition permettent d'éliminer six variables : trois coordonnées et trois vitesses ; en échange, on n'introduit que cinq variables nouvelles : deux angles et trois vitesses angulaires, qui expriment les rotations autour des axes mobiles. Trois de ces variables s'éliminent par les intégrales des aires; il en reste deux, qui sont conjuguées : le cosinus de l'inclinaison du plan des x, y et l'azimut de l'axe des x dans ce plan. Ces deux variables prennent la place des six qui ont été éliminées par les équations de condition ; nous avons par conséquent quatre variables de moins après avoir épuisé les intégrales des aires. On arrive ainsi de nouveau à $6n - 12$ équations différentielles du premier ordre, ou à un système canonique de $6n - 10$ équations dont on connaît une intégrale, $H = \text{const}$.

Reprenons l'expression de la force vive qui renferme la rotation d'un méridien mobile

$$2T = \Sigma m(x' - y\Omega')^2 + \Sigma m(y' + x\Omega')^2 + \Sigma m z'^2.$$

Le méridien est déterminé par une équation $f(xyz) = 0$, qui donne

$$\frac{df}{dt} = \Sigma(x'f'_x + y'f'_y + z'f'_z) = 0.$$

Je supposerai que ce sont là les seules équations de condition, soit que le principe du centre de gravité n'ait pas lieu, soit qu'il ait lieu, mais qu'on ait pris pour origine un point canonique (ce qui a pour effet d'éliminer un des corps, sans changer la forme de T, comme je l'expliquerai plus loin). On pourrait maintenant éliminer deux variables, par exemple, y_0 et y'_0, à l'aide des deux équations $f = 0$, $\frac{df}{dt} = 0$;

T resterait une fonction homogène du second degré des vitesses, et on pourrait y appliquer la méthode d'Hamilton, comme nous l'avons fait plus haut. Mais il vaut mieux différentier l'expression $T + \alpha \frac{df}{dt}$, où α est un multiplicateur qui se détermine par la condition que $\frac{dT}{dy'_0} = 0$. On trouve de cette manière

$$p = \frac{dT}{dx'} = m(x' - y\Omega') + \alpha f'_x,$$

$$q = \frac{dT}{dy'} = m(y' + x\Omega') + \alpha f'_y,$$

$$r = \frac{dT}{dz'} = mz' \qquad\qquad + \alpha f'_z,$$

$$K = \frac{dT}{d\Omega'} = \Sigma m(xy' - yx') + \Omega' \Sigma m(x^2 + y^2).$$

Il s'agit maintenant de remplacer dans T les variables x', y', z', Ω' par les variables p, q, r, K. On a d'abord

$$\Sigma(qx - py) = K + \alpha \Sigma(xf'_y - yf'_x),$$

d'où

$$\alpha = -\frac{K - \Sigma(qx - py)}{\Sigma(xf'_y - yf'_x)};$$

ensuite

$$2T = \Sigma \frac{1}{m}[(p - \alpha f'_x)^2 + (q - \alpha f'_y)^2 + (r - \alpha f'_z)^2],$$

expression dans laquelle nous pouvons supposer l'une des variables p, q, r, par exemple q_0, égale à zéro, à cause du multiplicateur indéterminé; en même temps, nous pouvons éliminer la variable conjuguée y_0 par l'équation $f = 0$. La méthode d'Hamilton donne ensuite le système canonique d'équations différentielles

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dH}{dp}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{dH}{dx},$$

. . . .

avec la quadrature $\frac{d\Omega}{dt} = \frac{dH}{dK}$, et l'intégrale $K = \text{const.}$, qui nous per-

met de prendre pour K la constante des aires. La formule qui donne α ne cesse pas d'être vraie, si nous prenons $f = y_0 = 0$, d'où $y'_0 = 0$ et $q_0 = 0$. En effet, elle repose sur l'équation

$$q_0 = \frac{1}{2} m_0 \frac{d(y'_0 + x_0 \Omega')^2}{x_0\, d\Omega'} + \alpha \frac{df}{dy_0} = 0,$$

qui subsiste pour $y_0 = 0$. Dans ce cas, les dérivées partielles de f sont nulles, à l'exception d'une seule, qui est égale à l'unité. Nous avons, par suite, en supposant $y_0 = 0$, $q_0 = 0$,

$$2\mathrm{T} = \Sigma \frac{1}{m}(p^2 + q^2 + r^2) + \frac{1}{m_0}\left(\frac{\mathrm{K} - \Sigma(qx - py)}{x_0}\right)^2.$$

Si le principe du centre de gravité a lieu, on peut encore éliminer six variables, soit directement, en rapportant les coordonnées à un point canonique (ce qui permet d'exclure l'un des corps), soit indirectement, en prenant l'origine au centre de gravité et en ajoutant à T l'expression $\beta_1 \Sigma m x' + \beta_2 \Sigma m y' + \beta_3 \Sigma m z'$, les multiplicateurs β_1, β_2, β_3 devant être choisis de manière que trois des variables p, q, r s'évanouissent identiquement. On trouve alors

$$\begin{aligned}
p &= m(x' - y\Omega' + \beta_1) + \alpha f'_x,\\
q &= m(y' + x\Omega' + \beta_2) + \alpha f'_y,\\
r &= m(z' + \beta_3) \qquad\qquad + \alpha f'_z,\\
\mathrm{K} &= \Sigma m(xy' - yx') + \Omega' \Sigma m(x^2 + y^2),
\end{aligned}$$

et, en tenant compte des équations

$$\begin{aligned}
\Sigma m x &= 0, \quad \Sigma m y = 0, \quad \Sigma m z = 0,\\
\Sigma m x' &= 0, \quad \Sigma m y' = 0, \quad \Sigma m z' = 0,
\end{aligned}$$

il vient

$$\begin{aligned}
\Sigma(qx - py) &= \mathrm{K} + \alpha \Sigma(x f'_y - y f'_x),\\
\Sigma p &= \beta_1 \Sigma m + \alpha \Sigma f'_x,\\
\Sigma q &= \beta_2 \Sigma m + \alpha \Sigma f'_y,\\
\Sigma r &= \beta_3 \Sigma m + \alpha \Sigma f'_z;
\end{aligned}$$

enfin

$$2\mathrm{T} = \Sigma \frac{1}{m}(p - m\beta_1 - \alpha f'_x)^2 + \ldots,$$

où il faut mettre pour α, β_1, β_2, β_3 les valeurs données par les équations ci-dessus. Pour prendre un exemple, supposons que le méridien mobile est un *plan nul,* d'après l'expression de M. Haton de la Goupillière, c'est-à-dire que $f = \Sigma mxy = 0$. Alors $f'_x = my$, $f'_y = mx$, $f'_z = 0$, $\Sigma f'_x = \Sigma f'_y = \Sigma f'_z = 0$.

Par suite,

$$\Sigma p = \beta_1 \Sigma m, \quad \Sigma q = \beta_2 \Sigma m, \quad \Sigma r = \beta_3 \Sigma m,$$
$$\Sigma(qx - py) = \mathrm{K} + \alpha \Sigma m(x^2 - y^2).$$

On tire de là

$$2\mathrm{T} = \Sigma \frac{1}{m}(p^2 + q^2 + r^2) - \frac{(\Sigma p)^2 + (\Sigma q)^2 + (\Sigma r)^2}{\Sigma m}$$
$$- 2\alpha \Sigma(qx + py) + \alpha^2 \Sigma m(x^2 + y^2),$$

ou bien, après quelques réductions,

$$2\mathrm{T} = \Sigma \frac{p^2 + q^2 + r^2}{m} - \frac{(\Sigma p)^2 + (\Sigma q)^2 + (\Sigma r)^2}{\Sigma m}$$
$$+ \frac{\Sigma mx^2(\mathrm{K} + 2\Sigma py)^2 + \Sigma my^2(\mathrm{K} - 2\Sigma qx)^2 - \Sigma m(x^2 + y^2)[\Sigma(py + qx)]^2}{[\Sigma m(x^2 - y^2)]^2}.$$

Dans cette expression, il est permis de supposer identiquement nulles les variables p_0, q_0, r_0 et p_1; en même temps on doit éliminer les variables conjuguées x_0, y_0, z_0, x_1, à l'aide des équations

$$\Sigma mx = 0, \quad \Sigma my = 0, \quad \Sigma mz = 0, \quad \Sigma mxy = 0.$$

On forme ensuite les $6n - 8$ équations

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\mathrm{H}}{dp}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{d\mathrm{H}}{dx}, \ldots,$$

dont on connaît trois intégrales (deux intégrales des aires et l'intégrale $\mathrm{H} = \text{const.}$), et d'où l'on peut encore éliminer dt.

Si nous avions pris pour origine un point canonique, nous aurions pu exclure dès le principe le corps m_0, et nous aurions trouvé

$$2\mathrm{T} = \Sigma \frac{p^2+q^2+r^2}{m} - 2\alpha\Sigma(qx+py) + \alpha^2\Sigma m(x^2+y^2).$$

En supposant $p_1 = 0$, il faudrait éliminer x_1 par l'équation

$$\Sigma mxy = 0,$$

puis différentier H comme précédemment.

Les deux intégrales des aires dont nous n'avons pas fait usage peuvent s'écrire comme il suit, en supposant que l'axe des z est l'axe polaire,

$$\Sigma m(zx' - xz') - \Omega'\Sigma myz = 0,$$
$$\Sigma m(yz' - zy') - \Omega'\Sigma mxz = 0,$$

ou bien,

$$\Sigma(pz - rx) = \alpha\Sigma(zf'_x - xf'_z),$$
$$\Sigma(ry - qz) = \alpha\Sigma(yf'_z - zf'_y).$$

Quand le méridien mobile est un *plan nul*, nous avons $\Sigma mxy = 0$, et

$$\Sigma(pz - rx) = \alpha\Sigma myz,$$
$$\Sigma(ry - qz) = -\alpha\Sigma mzx,$$
$$\Sigma(qx - py) = \alpha\Sigma m(x^2 - y^2) + \mathrm{K}.$$

L'élimination de α donne deux équations entre les variables x, y, z, p, q, r. La forme de ces intégrales est d'ailleurs la même, que l'on prenne pour origine le centre de gravité ou un point canonique.

II.

C'est ici le lieu de dire quelques mots de la transformation orthogonale par laquelle on peut réduire le mouvement d'un sytème libre de $n+1$ corps à un mouvement de n corps autour d'un centre d'attrac-

tion fixe. Cette transformation fait l'objet d'un Mémoire qui a paru dans les *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure;* je me bornerai à en citer quelques résultats.

On sait qu'une substitution orthogonale laisse intacte la forme quadratique Σx^2, qui devient $\Sigma \xi^2$ lorsqu'on introduit les variables ξ à la place des variables x. Cela tient aux équations de condition qui existent entre les coefficients de la substitution et qui ont pour effet de faire disparaître de l'expression

$$\Sigma x^2 = \Sigma(a_0 \xi_0 + a_1 \xi_1 + \ldots)^2,$$

tous les produits $\xi_0 \xi_1, \ldots$ qui ne sont pas des carrés. Plus généralement, on aura $\Sigma xy = \Sigma \xi \eta$, si la même substitution orthogonale a lieu entre les variables x, ξ, et entre les variables y, η, puisque la forme

$$\Sigma xy = \Sigma(a_0 \xi_0 + a_1 \xi_1 + \ldots)(a_0 \eta_0 + a_1 \eta_1 + \ldots)$$

a les mêmes coefficients que la forme Σx^2. Enfin, il est évident que l'on pourra ici remplacer les variables x, y par leurs dérivées, et que l'on pourra ajouter ensemble plusieurs équations telles que $\Sigma x^2 = \Sigma \xi^2$, $\Sigma y^2 = \Sigma \eta^2, \ldots$. On peut donc dire que la substitution orthogonale, appliquée simultanément à plusieurs systèmes de variables x_0, $x_1, \ldots$, y_0, $y_1, \ldots$, z_0, $z_1, \ldots$, laisse intacte la forme quadratique $\Sigma((x))$, où le symbole $((x))$ représente à volonté un produit ou une somme de produits tels que

$$\begin{aligned}
&xy, \quad x^2, \quad y^2, \quad x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 + z^2,\\
&x\,dx, \quad x\,dy - y\,dx,\\
&dx^2, \quad dx^2 + dy^2 + dz^2,\\
&d^2x\,\delta x + d^2y\,\delta y + d^2z\,\delta z.\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&D_x^2 + D_y^2 + D_z^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Si nous écrivons $\sqrt{m}\,x$ à la place de x, $\sqrt{\mu}\,\xi$ à la place de ξ, l'équation symbolique qui représente le résultat de la substitution orthogo-

nale devient

$$\Sigma m((x)) = \Sigma \mu((\xi)),$$

où $\Sigma m((x))$ peut représenter les moments d'inertie, la force vive, le mouvement aréolaire, la variation de la fonction des forces :

$$\delta U = \frac{1}{dt^2} \Sigma m(d^2 x\, \delta x + d^2 y\, \delta y + d^2 z\, \delta z),$$

les paramètres différentiels :

$$\Delta^2 = \Sigma \frac{1}{m}(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2) \quad \text{et} \quad \nabla = \Sigma \frac{1}{2m}(D_x D_x + D_y D_y + D_z D_z),$$

ou d'autres formes analogues.

Nous pouvons maintenant spécialiser la substitution orthogonale en introduisant la condition que μ_0 soit la somme des $n+1$ masses m_0, $m_1, \ldots$, et que ξ_0, η_0, ζ_0 soient les coordonnées du centre de gravité de ces masses. J'ai trouvé que les coefficients de cette substitution spéciale du degré $n+1$ peuvent être formés, suivant une loi très-simple, au moyen des coefficients de la substitution générale du degré n. Nous avons, dès lors, en désignant par M la somme des masses m, et par X, Y, Z les coordonnées de leur centre de gravité,

$$\sum_0^n m_i((x_i)) = M((X)) + \sum_1^n \mu_i((\xi_i)).$$

De cette formule on tire la suivante :

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} S &= \frac{1}{M} \Sigma m_i m_h ((x_i - x_h)) \\ &= \sum_0^n m_i((x_i)) - M((X)) = \sum_0^n m_i((x_i - X)) = \sum_1^n \mu_i((\xi_i)). \end{aligned} \right.$$

Le seul aspect de cette formule symbolique nous apprend que la force vive, le mouvement aréolaire, les moments d'inertie, le plan invariable, les axes principaux d'inertie, enfin la variation δU, sont les mêmes pour les n corps fictifs μ_1, $\mu_2, \ldots$, dont les coordonnées

sont les ξ, η, ζ, et pour les $n+1$ corps donnés m_0, $m_1, \ldots$, ces derniers étant rapportés à leur centre de gravité par les coordonnées $x - X$, $y - Y$, $z - Z$. Les formules de transformation nous permettent d'exprimer ces $3n + 3$ coordonnées par les $3n$ variables ξ, η, ζ; on peut donc exprimer U en fonction des mêmes variables. Dès lors, l'équation

$$dt^2 \delta U = \Sigma \mu (d^2 \xi \, \delta \xi + d^2 \eta \, \delta \eta + d^2 \zeta \, \delta \zeta)$$

nous donne

$$\mu \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \frac{dU}{d\xi}, \quad \mu \frac{d^2 \eta}{dt^2} = \frac{dU}{d\eta}, \quad \mu \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = \frac{dU}{d\zeta},$$

équations semblables à celles qu'on a pour les variables x, y, z. Le même raisonnement s'applique à la forme canonique des équations différentielles du mouvement, et l'on voit qu'elle a lieu pour les n corps fictifs comme pour les $n+1$ corps réels.

On peut d'ailleurs réduire cette transformation à un simple changement d'origine. En effet, la formule (1) montre que la somme S se réduit à n termes et qu'elle devient

$$S = \sum_1^n m_i ((x_i)),$$

si nous prenons pour origine un *point canonique*, défini par la condition, que

$$m_0 ((x_0)) = M ((X)),$$

ou bien

$$\sqrt{m_0}\, x_0 \pm \sqrt{M}\, X = 0$$

Cela ne change pas la valeur de S, puisqu'elle ne dépend que des différences des coordonnées. Le mouvement des *n planètes* m_1, $m_2, \ldots$ a donc lieu autour du point canonique comme autour d'un centre fixe, car nous avons

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dU}{dx}, \ldots,$$

en remplaçant dans U les coordonnées x_0, y_0, z_0 par des fonctions linéaires des autres coordonnées. Si nous prenons le signe supérieur et $m_0 = 1$, il vient

$$x_0 = -\frac{1}{1+\sqrt{M}}\sum_1^n m_i x_i, \ldots$$

Les intégrales des forces vives et des aires ont lieu sans changement pour les n planètes rapportées au point mobile qui vient d'être défini, et les constantes H, K sont les mêmes que lorsqu'on rapporte les $n+1$ corps à leur centre de gravité. Le plan invariable et les axes principaux d'inertie sont aussi les mêmes dans les deux cas. Enfin, la transformation s'étend à l'équation aux dérivées partielles dont la solution complète fournit les intégrales du problème. J'appellerai *premier paramètre différentiel du système* le symbole déjà défini

$$\nabla = \Sigma \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d}{dz}\right)^2\right],$$

c'est-à-dire la demi-somme des carrés des paramètres différentiels du premier ordre dans la notation de M. Lamé. L'équation dont il s'agit peut alors s'écrire

$$\nabla W = U + H.$$

Or, la formule (1) montre que

$$\nabla W = \sum_1^n \frac{1}{2\mu}\left[\left(\frac{dW}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dW}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dW}{d\zeta}\right)^2\right] + \frac{1}{2M}\left[\left(\frac{dW}{dX}\right)^2 + \left(\frac{dW}{dY}\right)^2 + \left(\frac{dW}{dZ}\right)^2\right],$$

d'où il suit que l'équation aux dérivées partielles qui définit la fonction caractéristique W devient

$$\nabla_{(\xi)} W = U + H - \frac{1}{2M}\left[\left(\frac{dW}{dX}\right)^2 + \left(\frac{dW}{dY}\right)^2 + \left(\frac{dW}{dZ}\right)^2\right].$$

Le symbole $\nabla_{(\xi)}$ ne comprend plus que $3n$ termes au lieu de $3n+3$, et les dérivées partielles de W par rapport aux trois coordonnées X, Y, Z du centre de gravité ne figurent ici que comme des constantes, puisque U ne renferme pas les variables X, Y, Z.

Pour trois corps, la formule (1) donne encore cette relation curieuse :

$$(2) \qquad \mathrm{m}^2 \Sigma \frac{1}{m_i} ((\mathrm{x}_i)) = \Sigma m_i ((x_i - \mathrm{X})),$$

où

$$\mathrm{x}_1 = x_2 - x_3, \quad \mathrm{x}_2 = x_3 - x_1, \quad \mathrm{x}_3 = x_1 - x_2, \quad \mathrm{m}^2 = \frac{m_1 m_2 m_3}{\mathrm{M}}.$$

Il existe donc une substitution orthogonale entre les variables $\frac{\mathrm{m}\mathrm{x}_i}{\sqrt{m_i}}$ et $\sqrt{m_i}(x_i - \mathrm{X})$, c'est-à-dire entre les coordonnées relatives de trois masses et leurs coordonnées rapportées à leur centre de gravité. La substitution est la suivante :

$$\mathrm{x}_1 = x_2 - x_3 + \frac{m_1}{\mathrm{m}\mathrm{M}} \Sigma m_i (x_i - \mathrm{X}),$$

$$x_2 - x_3 = \mathrm{x}_1 - \frac{m_1}{\mathrm{M}} \Sigma \mathrm{x}_i,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

et les neuf coefficients sont

$$\frac{m_1}{\mathrm{M}}, \quad \frac{\sqrt{m_1 m_2} + \sqrt{m_3 \mathrm{M}}}{\mathrm{M}}, \quad \frac{\sqrt{m_3 m_1} - \sqrt{m_2 \mathrm{M}}}{\mathrm{M}},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Si, dans la fonction des forces U, nous remplaçons les différences des coordonnées $x_1 - x_2$, $y_1 - y_2, \dots$ par des expressions de cette forme

$$\mathrm{x}_3 - \frac{m_3}{\mathrm{M}} \Sigma \mathrm{x}, \quad \mathrm{y}_3 - \frac{m_3}{\mathrm{M}} \Sigma \mathrm{y}, \dots,$$

nous avons

$$\mathrm{m}^2 \frac{d^2 \mathrm{x}_3}{dt^2} = m_3 \frac{d\mathrm{U}}{d\mathrm{x}_3}, \quad \mathrm{m}^2 \frac{d^2 \mathrm{y}_3}{dt^2} = m_3 \frac{d\mathrm{U}}{d\mathrm{y}_3}, \dots.$$

La transformation orthogonale par laquelle on se débarrasse des équations de condition $\Sigma mx = 0, \dots$ du centre de gravité, existe entre les coordonnées *de même nom* d'un certain nombre de points

matériels; elle est indépendante de la direction des axes coordonnés. Les points μ sont déterminés par les points m, en vertu d'équations analogues à celles qui déterminent les centres de gravité. Au contraire, la transformation orthogonale dont on se sert ordinairement ne détermine que la direction des axes; elle laisse intactes les expressions de la forme

$$x_i x_h + y_i y_h + z_i z_h,$$

où l'on peut remplacer les variables par leurs dérivées, si les coefficients de la transformation sont des constantes, c'est-à-dire si les axes restent fixes dans l'espace.

III.

Avant d'aller plus loin, il sera utile de rappeler quelques formules qui servent à la transformation des coordonnées. Considérons deux systèmes d'axes rectangulaires, l'un fixe, l'autre mobile, ayant même origine; soient x, y, z les *coordonnées fixes*, et x, y, z les *coordonnées mobiles* d'un point animé d'un mouvement indépendant. Désignons par a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3 les coordonnées mobiles des points d'intersection des axes fixes avec une sphère de rayon égal à l'unité, qui a l'origine pour centre; les coordonnées fixes des points d'intersection des axes mobiles avec la même sphère seront a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3. On aura les formules connues :

$$\begin{aligned}
\mathrm{x} &= a_1 x + b_1 y + c_1 z, & x &= a_1 \mathrm{x} + a_2 \mathrm{y} + a_3 \mathrm{z},\\
\mathrm{y} &= a_2 x + b_2 y + c_2 z, & y &= b_1 \mathrm{x} + b_2 \mathrm{y} + b_3 \mathrm{z},\\
\mathrm{z} &= a_3 x + b_3 y + c_3 z, & z &= c_1 \mathrm{x} + c_2 \mathrm{y} + c_3 \mathrm{z},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_1 z - c_1 y &= a_3 \mathrm{y} - a_2 \mathrm{z},\\
c_1 x - a_1 z &= b_3 \mathrm{y} - b_2 \mathrm{z},\\
a_1 y - b_1 x &= c_3 \mathrm{y} - c_2 \mathrm{z},
\end{aligned}$$

et ainsi de suite. En remplaçant les coordonnées x, y, z, x, y, z par les coordonnées des points d'intersection de la sphère avec les axes, on

aura

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1, \qquad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1,$$
$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0, \quad a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_1 = b_2 c_3 - b_3 c_2,$$
$$b_1 = c_2 a_3 - c_3 a_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Je désignerai toujours par des lettres accentuées (x', y', ...) les dérivées des variables prises par rapport au temps. Les composantes de la vitesse d'un point (xyz, xyz) seront représentées par des lettres surmontées d'un point $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, $\dot{\mathrm{x}}$, $\dot{\mathrm{y}}$, $\dot{\mathrm{z}}$); pour les axes fixes on aura donc $\mathrm{x}' = \dot{\mathrm{x}}$, $\mathrm{y}' = \dot{\mathrm{y}}$, $\mathrm{z}' = \dot{\mathrm{z}}$. Enfin, je me servirai d'un exposant o (x^o, y^o, z^o, x^o, y^o, z^o) pour désigner les rotations autour des axes, c'est-à-dire les composantes de la rotation du système mobile. Les vitesses étant considérées comme des longueurs prises dans la direction du mouvement, les rotations comme des longueurs portées sur l'axe de rotation, les aires ou vitesses aréolaires comme des longueurs portées sur la normale à l'orbite, on peut les projeter sur les axes coordonnés comme les rayons vecteurs et les distances; nous aurons

$$\dot{\mathrm{x}} = a_1 \dot{x} + b_1 \dot{y} + c_1 \dot{z}, \qquad \dot{x} = a_1 \dot{\mathrm{x}} + a_2 \dot{\mathrm{y}} + a_3 \dot{\mathrm{z}},$$
$$\mathrm{x}^o = a_1 x^o + b_1 y^o + c_1 z^o, \qquad x^o = a_1 \mathrm{x}^o + a_2 \mathrm{y}^o + a_3 \mathrm{z}^o,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

comme pour les coordonnées. Nous prendrons les rotations dans le sens indiqué ci-après :

$$\begin{array}{cccc} y \rightarrow z & \rightarrow x & \rightarrow y, \\ +x^o & +y^o & +z^o \end{array}$$

Alors

$$x^o = c_1 b'_1 + c_2 b'_2 + c_3 b'_3 = -b_1 c'_1 - b_2 c'_2 - b_3 c'_3,$$
$$y^o = a_1 c'_1 + a_2 c'_2 + a_3 c'_3 = -c_1 a'_1 - c_2 a'_2 - c_3 a'_3,$$
$$z^o = b_1 a'_1 + b_2 a'_2 + b_3 a'_3 = -a_1 b'_1 - a_2 b'_2 - a_3 b'_3.$$

De même

$$\begin{aligned}
\mathrm{x}^0 &= a_2 a'_3 + b_2 b'_3 + c_2 c'_3 = - a_3 a'_2 - b_3 b'_2 - c_3 c'_2,\\
\mathrm{y}^0 &= a_3 a'_1 + b_3 b'_1 + c_3 c'_1 = - a_1 a'_3 - b_1 b'_3 - c_1 c'_3,\\
\mathrm{z}^0 &= a_1 a'_2 + b_1 b'_2 + c_1 c'_2 = - a_2 a'_1 - b_2 b'_1 - c_2 c'_1.
\end{aligned}$$

Pour les vitesses absolues d'un point (x, y, z) dans les directions des axes mobiles, on aura

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned}
\dot{x} &= x' + y^0 z - z^0 y,\\
\dot{y} &= y' + z^0 x - x^0 z,\\
\dot{z} &= z' + x^0 y - y^0 x.
\end{aligned}\right.$$

Ces vitesses étant nulles pour les points des axes fixes dont les coordonnées mobiles sont a, b, c, nous avons

$$0 = a' + y^0 c - z^0 b,$$

et ainsi de suite, ou bien

$$\begin{aligned}
a'_1 &= z^0 b_1 - y^0 c_1 = \mathrm{y}^0 a_3 - \mathrm{z}^0 a_2,\\
b'_1 &= x^0 c_1 - z^0 a_1 = \mathrm{y}^0 b_3 - \mathrm{z}^0 b_2,\\
c'_1 &= y^0 a_1 - x^0 b_1 = \mathrm{y}^0 c_3 - \mathrm{z}^0 c_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

On tire de là

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned}
x^0 a'_1 + y^0 b'_1 + z^0 c'_1 &= 0,\\
x^0 a'_2 + y^0 b'_2 + z^0 c'_2 &= 0,\\
x^0 a'_3 + y^0 b'_3 + z^0 c'_3 &= 0,
\end{aligned}\right.$$

et

$$\mathrm{x}^0 a'_1 + \mathrm{y}^0 a'_2 + \mathrm{z}^0 a'_3 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

d'où

$$d\mathrm{x}^0 = a_1\, dx^0 + b_1\, dy^0 + c_1\, dz^0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Enfin nous avons

$$\begin{aligned}
x^0 &= a_1 \mathrm{x}^0 - b_1 c'_1 + c_1 b'_1 = a_2 \mathrm{y}^0 - b_2 c'_2 + c_2 b'_2 = a_3 \mathrm{z}^0 - b_3 c'_3 + c_3 b'_3,\\
y^0 &= b_1 \mathrm{x}^0 - c_1 a'_1 + a_1 c'_1 = b_2 \mathrm{y}^0 - c_2 a'_2 + a_2 c'_2 = b_3 \mathrm{z}^0 - c_3 a'_3 + a_3 c'_3,\\
z^0 &= c_1 \mathrm{x}^0 - a_1 b'_1 + b_1 a'_1 = c_2 \mathrm{y}^0 - a_2 b'_2 + b_2 a'_2 = c_3 \mathrm{z}^0 - a_3 b'_3 + b_3 a'_3,
\end{aligned}$$

formules qui expriment les trois rotations autour des axes mobiles par la rotation autour d'un axe fixe et par les dérivées des cosinus qui déterminent cet axe fixe par rapport aux axes mobiles. Les trois cosinus d'un axe ne représentent que deux variables indépendantes, les neuf cosinus d'une transformation orthogonale n'en représentent que trois. On les exprime ordinairement par l'inclinaison I du plan des x, y sur le plan des x, y, et par les angles Ω, φ que l'intersection de ces plans fait avec les axes des x et des x; j'appellerai Ω la longitude du nœud, et φ l'azimut de l'axe des x. Nous aurons

$$\begin{aligned} a_3 &= \sin \mathrm{I} \sin\varphi, & x^0 &= \Omega' \sin \mathrm{I} \sin\varphi + \mathrm{I}' \cos\varphi,\\ b_3 &= \sin \mathrm{I} \cos\varphi, & y^0 &= \Omega' \sin \mathrm{I} \cos\varphi - \mathrm{I}' \sin\varphi,\\ c_3 &= \cos \mathrm{I}, & z^0 &= \Omega' \cos \mathrm{I} + \varphi',\\ & & \mathrm{z}^0 &= \Omega' + \varphi' \cos \mathrm{I}. \end{aligned}$$

En prenant le nœud pour axe des x, on aurait $\varphi = 0$, et

$$x^0 = \mathrm{I}', \quad y^0 = \Omega' \sin \mathrm{I}, \quad z^0 = \Omega' \cos \mathrm{I}, \quad \mathrm{z}^0 = \Omega'.$$

On voit que les rotations dépendent en général de deux angles et de trois vitesses angulaires. On peut encore les exprimer d'une manière assez élégante par les longitudes Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 des intersections du plan des x, y avec les trois plans des y, z, des z, x et des x, y. Je ferai

$$\Psi_2 - \Psi_3 = \vartheta_1, \quad \Psi_3 - \Psi_1 = \vartheta_2, \quad \Psi_1 - \Psi_2 = \vartheta_3,$$

d'où

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 = 0.$$

Alors, en désignant encore par I_1, I_2, I_3 les inclinaisons des trois plans :

$$\begin{aligned} \mathrm{x} &= x \sin \mathrm{I}_1 \sin \Psi_1 + y \sin \mathrm{I}_2 \sin \Psi_2 + z \sin \mathrm{I}_3 \sin \Psi_3,\\ \mathrm{y} &= - x \sin \mathrm{I}_1 \cos \Psi_1 - y \sin \mathrm{I}_2 \cos \Psi_2 - z \sin \mathrm{I}_3 \cos \Psi_3,\\ \mathrm{z} &= x \cos \mathrm{I}_1 + y \cos \mathrm{I}_2 + z \cos \mathrm{I}_3, \end{aligned}$$

ou bien, en faisant

$$\Theta^2 = -2\sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 = \frac{1}{2}(\sin 2\theta_1 + \sin 2\theta_2 + \sin 2\theta_3)$$

et

$$\Phi^2 = \operatorname{tang}\theta_1 \operatorname{tang}\theta_2 \operatorname{tang}\theta_3,$$

$$\mathrm{x}\Theta = x\sqrt{\sin 2\theta_1}\sin\Psi_1 + y\sqrt{\sin 2\theta_2}\sin\Psi_2 + z\sqrt{\sin 2\theta_3}\sin\Psi_3,$$
$$\mathrm{y}\Theta = -x\sqrt{\sin 2\theta_1}\cos\Psi_1 - y\sqrt{\sin 2\theta_2}\cos\Psi_2 - z\sqrt{\sin 2\theta_3}\cos\Psi_3,$$
$$\mathrm{z}\Phi = x\sqrt{\operatorname{tang}\theta_1} + y\sqrt{\operatorname{tang}\theta_2} + z\sqrt{\operatorname{tang}\theta_3}.$$

Soit maintenant

$$l_1 = \Psi'_1 \sin^2 \mathrm{I}_1 = \Psi'_1 \frac{\sin 2\theta_1}{\Theta^2} = -\Psi'_1 \frac{\cos\theta_1}{\sin\theta_2 \sin\theta_3},$$

de même

$$l_2 = \Psi'_2 \sin^2 \mathrm{I}_2, \quad l_3 = \Psi'_3 \sin^2 \mathrm{I}_3,$$

on aura

$$2\mathrm{z}^0 = l_1 + l_2 + l_3,$$
$$2\cos \mathrm{I}_1\, x^0 = -l_1 + l_2 + l_3,$$
$$2\cos \mathrm{I}_2\, y^0 = +l_1 - l_2 + l_3,$$
$$2\cos \mathrm{I}_3\, z^0 = +l_1 + l_2 - l_3,$$

et les angles I_1, I_2, I_3, compris entre les axes mobiles et l'axe fixe des z, s'expriment par les longitudes des trois nœuds à l'aide des formules

$$\cos^2 \mathrm{I}_1 = \operatorname{cotang}\theta_2 \operatorname{cotang}\theta_3, \quad \sin^2 \mathrm{I}_1 = \frac{\sin 2\theta_1}{\Theta^2}, \dots$$

On voit que les rotations dépendent ici des trois vitesses angulaires Ψ'_1, Ψ'_2, Ψ'_3, et des trois différences θ_1, θ_2, θ_3, lesquelles ne représentent que deux variables, puisque leur somme est nulle. Nous pouvons écrire

$$\mathrm{z}^0 = \frac{\Psi'_1 \sin 2\theta_1 + \Psi'_2 \sin 2\theta_2 + \Psi'_3 \sin 2\theta_3}{\sin 2\theta_1 + \sin 2\theta_2 + \sin 2\theta_3},$$

$$x^0 = \frac{\Psi'_1 \sin 2\theta_1 - \Psi'_2 \sin 2\theta_2 - \Psi'_3 \sin 2\theta_3}{\sin\theta_1 \sqrt{\sin 2\theta_2 . \sin 2\theta_3}},$$

. . . .

IV.

La force vive d'un système de points matériels s'exprimera maintenant par la formule

$$\begin{aligned}2\mathrm{T} &= \Sigma m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)\\ &= \Sigma m(x'+y^0 z - z^0 y)^2 + \Sigma m(y'+z^0 x - x^0 z)^2 + \Sigma m(z'+x^0 y - y^0 x)^2.\end{aligned}$$

Le double de l'aire qu'un rayon vecteur décrit dans l'unité de temps peut se projeter sur les trois plans mobiles, ce qui donne les trois composantes

$$y\dot{z} - z\dot{y},\quad z\dot{x} - x\dot{z},\quad x\dot{y} - y\dot{x},$$

que nous pouvons nous figurer comme des longueurs portées sur les axes mobiles des x, y, z. Je les supposerai toujours multipliées par les masses, et j'appellerai *mouvement aréolaire autour de l'axe des* z la somme

$$\Sigma m(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

Les mouvements aréolaires sont les dérivées partielles de la demi-force vive par rapport aux rotations; en effet

$$\frac{d\mathrm{T}}{dz^0} = \Sigma m\left(\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dz^0} + \dot{y}\frac{d\dot{y}}{dz^0}\right) = \Sigma m(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

On aura d'ailleurs

$$\begin{aligned}\frac{d\mathrm{T}}{dx^0} &= \Sigma m(yz' - zy') + x^0\,\Sigma m(y^2+z^2) - y^0\,\Sigma m xy - z^0\,\Sigma m zx,\\ \frac{d\mathrm{T}}{dy^0} &= \Sigma m(zx' - xz') + y^0\,\Sigma m(z^2+x^2) - z^0\,\Sigma m yz - x^0\,\Sigma m xy,\\ \frac{d\mathrm{T}}{dz^0} &= \Sigma m(xy' - yx') + z^0\,\Sigma m(x^2+y^2) - x^0\,\Sigma m zx - y^0\,\Sigma m yz.\end{aligned}$$

Dans le cas où les plans mobiles sont les plans principaux d'inertie,

on aura, en désignant par A, B, C les moments d'inertie principaux,

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\mathrm{T}}{dx^0} &= \Sigma m(yz' - zy') + x^0\mathrm{A},\\ \frac{d\mathrm{T}}{dy^0} &= \Sigma m(zx' - xz') + y^0\mathrm{B},\\ \frac{d\mathrm{T}}{dz^0} &= \Sigma m(xy' - yx') + z^0\mathrm{C}. \end{aligned}\right.$$

Si nous prenons pour axe des z l'axe polaire, c'est-à-dire la normale au plan invariable, les intégrales des aires nous apprennent que le mouvement aréolaire autour de cet axe est égal à une constante K, et qu'il est nul autour d'un axe quelconque perpendiculaire au premier. Il s'ensuit que le mouvement aréolaire autour d'un des axes mobiles sera égal à la projection de K sur cet axe, K étant une longueur portée sur l'axe polaire, et que les intégrales des aires pourront s'écrire

$$(6)\qquad \frac{d\mathrm{T}}{dx^0} = \mathrm{K}a, \quad \frac{d\mathrm{T}}{dy^0} = \mathrm{K}b, \quad \frac{d\mathrm{T}}{dz^0} = \mathrm{K}c,$$

où a, b, c sont les trois cosinus de l'axe polaire.

La force vive étant une fonction homogène du second degré par rapport aux vitesses apparentes x', y', z' et aux rotations x^0, y^0, z^0, on aura

$$\mathrm{T} = \Sigma\left(x'\frac{d\mathrm{T}}{dx'} + y'\frac{d\mathrm{T}}{dy'} + z'\frac{d\mathrm{T}}{dz'}\right) + x^0\frac{d\mathrm{T}}{dx^0} + y^0\frac{d\mathrm{T}}{dy^0} + z^0\frac{d\mathrm{T}}{dz^0} - \mathrm{T},$$

et en prenant les différentielles totales

$$d\mathrm{T} = \Sigma\left(x'd\frac{d\mathrm{T}}{dx'} + \ldots - \frac{d\mathrm{T}}{dx}dx - \ldots\right) + x^0 d\frac{d\mathrm{T}}{dx^0} + \ldots,$$

ou bien, en faisant

$$\frac{d\mathrm{T}}{dx'} = p, \quad \frac{d\mathrm{T}}{dy'} = q, \quad \frac{d\mathrm{T}}{dz'} = r,$$

$$d\mathrm{T} = \Sigma\left(x'dp + \ldots - \frac{d\mathrm{T}}{dx}dx - \ldots\right) + x^0 d\frac{d\mathrm{T}}{dx^0} + \ldots$$

Si les intégrales des aires ont lieu, nous pouvons remplacer les dérivées $\frac{dT}{dr^0}\cdots$ par $\mathrm{K}a,\ldots$, et alors

$$dT = \Sigma\left(x'dp - \frac{dT}{dx}dx\right) + \ldots + \mathrm{K}(x^0 da + y^0 db + z^0 dc).$$

Si, d'un autre côté, nous éliminons les variables $x', y', z', x^0, y^0, z^0$, à l'aide des relations linéaires

$$p = \frac{dT}{dx'},\ldots, \quad \mathrm{K}a = \frac{dT}{dx^0},\ldots,$$

la force vive devient une fonction homogène du second degré des variables p, q, r, a, b, c; elle renferme en outre les variables x, y, z. Il s'ensuit que, sous cette forme,

$$dT = \Sigma\left(\frac{dT}{dp}\right)dp + \Sigma\left(\frac{dT}{dx}\right)dx + \ldots + \left(\frac{dT}{da}\right)da + \ldots$$

Cette expression doit être identique à la première, puisque l'une se déduit de l'autre par une simple transformation littérale; donc

$$x' = \left(\frac{dT}{dp}\right), \quad \frac{dT}{dx} = -\left(\frac{dT}{dx}\right), \quad \mathrm{K}x^0 = \left(\frac{dT}{da}\right),$$

. . . .

pour toutes les variables employées. On peut d'ailleurs remarquer qu'en vertu des intégrales des aires le dernier terme de dT, qui dépend des rotations, s'évanouit, en supposant que les rotations soient exprimées en fonction des trois cosinus a, b, c. En effet, si nous désignons par z^0 la rotation autour de l'axe polaire, les formules (4) donnent

$$ax^0 + by^0 + cz^0 = \mathrm{z}^0,$$
$$x^0 da + y^0 db + z^0 dc = 0.$$

On tire de là

$$2T = \Sigma(px' + qy' + rz') + \mathrm{K}\mathrm{z}^0,$$

et

$$dT = \Sigma(x'dp + y'dq + z'dr) - \Sigma\left(\frac{dT}{dx}dx + \frac{dT}{dy}dy + \frac{dT}{dz}dz\right).$$

Par conséquent aussi

$$\left(\frac{dT}{da}\right)da + \left(\frac{dT}{db}\right)db + \left(\frac{dT}{dc}\right)dc = 0.$$

On a d'ailleurs

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1, \quad ada + bdb + cdc = 0,$$

et, à cause des relations

$$a' = bz^0 - cy^0, \ldots$$

que nous avons démontrées plus haut,

$$\begin{aligned} K\frac{da}{dt} &= b\left(\frac{dT}{dc}\right) - c\left(\frac{dT}{db}\right), \\ K\frac{db}{dt} &= c\left(\frac{dT}{da}\right) - a\left(\frac{dT}{dc}\right), \\ K\frac{dc}{dt} &= a\left(\frac{dT}{db}\right) - b\left(\frac{dT}{da}\right). \end{aligned}$$

Des deux premières de ces équations on déduit

$$K(a'b - ab') = (a^2 + b^2)\left(\frac{dT}{dc}\right) - ac\left(\frac{dT}{da}\right) - bc\left(\frac{dT}{db}\right).$$

Or, si l'on pose

$$a = \sqrt{1 - c^2}\sin\varphi, \quad b = \sqrt{1 - c^2}\cos\varphi,$$

on aura

$$\frac{da}{dc} = -\frac{ac}{a^2 + b^2}, \quad \frac{db}{dc} = -\frac{bc}{a^2 + b^2}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{a'b - ab'}{a^2 + b^2}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} K\frac{d\varphi}{dt} &= \left(\frac{dT}{dc}\right) + \left(\frac{dT}{da}\right)\frac{da}{dc} + \left(\frac{dT}{db}\right)\frac{db}{dc} \\ &= \frac{dT}{dc}. \end{aligned}$$

D'un autre côté, la troisième équation donne

$$\begin{aligned} \mathrm{K}\frac{dc}{dt} &= \sin\varphi\left(\frac{d\mathrm{T}}{d\cos\varphi}\right) - \cos\varphi\left(\frac{d\mathrm{T}}{d\sin\varphi}\right) \\ &= -\frac{d\mathrm{T}}{d\varphi}. \end{aligned}$$

On voit que l'azimut φ de l'axe des x et le cosinus c de l'angle compris entre l'axe des z et l'axe polaire sont des variables conjuguées. Le nœud Ω n'est point entré dans les équations. Pour compléter le système des équations différentielles, nous écrirons les équations du mouvement sous la forme adoptée par Lagrange :

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d(\mathrm{T}+\mathrm{U})}{dx}, \ldots.$$

Il faut ici supposer que les coordonnées x, y, z ont été réduites au plus petit nombre possible à l'aide des équations de condition, ce qui n'empêche pas T d'être une fonction homogène des x', y', z', et n'a, par conséquent, aucune influence sur le raisonnement qui vient d'être présenté. Les équations ci-dessus sont d'ailleurs évidemment indépendantes du choix des variables par lesquelles on remplacera les rotations x^0, y^0, z^0, et, puisque $\frac{d\mathrm{T}}{dx} = -\left(\frac{d\mathrm{T}}{dx}\right)$, elles donnent

$$\frac{dp}{dt} = -\left(\frac{d\mathrm{H}}{dx}\right), \ldots,$$

où $\mathrm{H} = \mathrm{T} - \mathrm{U}$. Si nous supprimons les parenthèses, nous avons le système canonique

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{d\mathrm{H}}{dp}, & \frac{dp}{dt} &= -\frac{d\mathrm{H}}{dx}, \ldots, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{d\mathrm{H}}{dq}, & \frac{dq}{dt} &= -\frac{d\mathrm{H}}{dy}, \ldots, \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{d\mathrm{H}}{dr}, & \frac{dr}{dt} &= -\frac{d\mathrm{H}}{dz}, \ldots, \\ \mathrm{K}\frac{d\varphi}{dt} &= \frac{d\mathrm{H}}{dc}, & \mathrm{K}\frac{dc}{dt} &= -\frac{d\mathrm{H}}{d\varphi}. \end{aligned}\right.$$

Les équations du centre de gravité et les trois équations de condition qui déterminent les axes mobiles réduisent le nombre des variables x, y, z à $3n - 6$; le nombre des équations ci-dessus n'est donc que de $6n - 12 + 2 = 6n - 10$. Nous avons, en outre, l'intégrale $\mathrm{H} = \text{const.}$; donc, si nous éliminons la différentielle du temps dt, notre système ne représente en définitive que $6n - 12$ équations du premier ordre.

La constante K n'entre dans T que multipliée par a, b, c; par conséquent

$$\left(\frac{d\mathrm{T}}{d\mathrm{K}}\right) = \Sigma \frac{a}{\mathrm{K}}\left(\frac{d\mathrm{T}}{da}\right) = ax^{\circ} + by^{\circ} + cz^{\circ} = \mathrm{z}^{\circ},$$

ou bien

$$(8) \qquad \mathrm{z}^{\circ} = \frac{d\mathrm{H}}{d\mathrm{K}}.$$

Quand on n'a qu'une seule intégrale des aires, il faut faire coïncider l'axe des z avec l'axe polaire, ce qui donne

$$x^{\circ} = y^{\circ} = 0, \quad z^{\circ} = \Omega', \quad \frac{d\mathrm{T}}{dz^{\circ}} = \mathrm{K}.$$

Dans ce cas, nous avons une seule équation entre les coordonnées (elle détermine l'axe mobile des x); le nombre des équations différentielles est alors de $6n - 2$, elles représentent $6n - 4$ équations du premier ordre en comptant l'intégrale $\mathrm{H} = \text{const.}$, et l'élimination de dt. La seule inconnue que l'on introduise par l'emploi des axes mobiles est ici la longitude Ω; elle se détermine par la quadrature

$$\Omega' = \frac{d\mathrm{H}}{d\mathrm{K}}.$$

Si nous exprimons les rotations par trois angles ψ_1, ψ_2, ψ_3 et trois vitesses angulaires ψ'_1, ψ'_2, ψ'_3, la différentielle $d\mathrm{T}$ renfermera le terme

$$\Sigma\left(\psi' d\pi - \frac{d\mathrm{T}}{d\psi} d\psi\right),$$

qui devra s'annuler par les intégrales des aires. Néanmoins, si nous

éliminons $x', y', z', \ldots, \psi'$ par les relations linéaires

$$p = \frac{dT}{dx'}, \ldots, \quad \pi = \frac{dT}{d\psi'},$$

nous pourrons raisonner comme précédemment en comparant les deux expressions de dT obtenues avant et après l'élimination. Nous aurons

$$\begin{aligned} dT &= \Sigma\left(x'dp - \frac{dT}{dx}dx\right) + \ldots + \Sigma\left(\psi' d\pi - \frac{dT}{d\psi}d\psi\right) \\ &= \Sigma\left(\frac{dT}{dp}\right)dp + \Sigma\left(\frac{dT}{dx}\right)dx + \ldots + \Sigma\left(\frac{dT}{d\pi}\right)d\pi + \Sigma\left(\frac{dT}{d\psi}\right)d\psi; \end{aligned}$$

d'où

$$x' = \left(\frac{dT}{dp}\right), \quad \frac{dT}{dx} = -\left(\frac{dT}{dx}\right), \ldots,$$
$$\psi' = \left(\frac{dT}{d\pi}\right), \quad \frac{dT}{d\psi} = -\left(\frac{dT}{d\psi}\right), \ldots.$$

Les équations de Lagrange donnent ensuite

$$\frac{dp}{dt} = -\left(\frac{dH}{dx}\right), \ldots, \quad \frac{d\pi}{dt} = -\left(\frac{dH}{d\psi}\right), \ldots.$$

On tirerait de là le système canonique

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dH}{dp}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{dH}{dx},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{dH}{d\pi}, \quad \frac{d\pi}{dt} = -\frac{dH}{d\psi},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Mais ce système se simplifie par les intégrales des aires. En effet, si nous prenons pour les variables ψ les longitudes Ψ des nœuds des plans mobiles, les rotations ne renferment que les différences $\theta_1 = \Psi_2 - \Psi_3, \ldots$, et nous avons

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 0.$$

D'un autre côté, en vertu des intégrales des aires,

$$\frac{dT}{d\Psi'} = \Sigma \frac{dT}{dx^0} \frac{dx^0}{d\Psi'} = K \Sigma \frac{a dx^0}{d\Psi'} = K \frac{dz^0}{d\Psi'},$$

ou bien

$$\pi = \frac{K \sin 2\theta}{2\Theta^2} = \frac{K \sin 2\theta}{\Sigma \sin 2\theta},$$

d'où

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = K$$

et

$$\pi_1^2 + \pi_2^2 + 2\pi_1 \pi_2 \cos 2\theta_3 = \pi_3^2, \dots$$

Les six variables θ, π ne représentent donc en définitive que deux variables indépendantes. On aura d'ailleurs

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \left(\frac{dT}{d\pi_2}\right) - \left(\frac{dT}{d\pi_3}\right),$$

$$\frac{d\pi_1}{dt} = \left(\frac{dT}{d\theta_2}\right) - \left(\frac{dT}{d\theta_3}\right),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Lorsqu'on exprime les rotations par les variables φ, I, φ', I', Ω', on a, comme nous l'avons vu,

$$\begin{aligned} a &= \sin I \sin\varphi, & x^0 &= \Omega' a + I' \cos\varphi, \\ b &= \sin I \cos\varphi, & y^0 &= \Omega' b - I' \sin\varphi, \\ c &= \cos I, & z^0 &= \Omega' c + \varphi', \\ & & z^0 &= \Omega' \; + \varphi' c. \end{aligned}$$

Les intégrales des aires peuvent se mettre sous les formes suivantes :

$$\frac{dT}{d\Omega'} = K, \quad \frac{dT}{dI'} = 0, \quad \frac{dT}{dI} = 0, \quad \frac{dT}{d\varphi'} = Kc, \quad \frac{dT}{d\varphi} = Kc'.$$

Si nous éliminons les vitesses angulaires Ω', I', φ' à l'aide des relations

linéaires ci-dessus, nous pouvons raisonner comme précédemment pour les variables ψ', et nous trouvons que les équations

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{dH}{dp}\right), \quad \frac{dp}{dt} = -\left(\frac{dH}{dx}\right), \dots$$

subsistent toujours; seulement l'expression de H renferme, à la place des trois variables π_1, π_2, π_3, les valeurs de $\frac{dT}{d\Omega'}$, $\frac{dT}{dI'}$, $\frac{dT}{d\varphi'}$, qui sont : K, o, Kc. Il ne reste donc dans H, à côté des variables x, y, z, p, q, r, que φ et $c = \cos I$. La comparaison des deux valeurs de dT, obtenues avant et après l'élimination, donne encore

$$\frac{dT}{d\varphi} = -\left(\frac{dT}{d\varphi}\right),$$

d'où

$$K\frac{dc}{dt} = -\left(\frac{dT}{d\varphi}\right) = -\left(\frac{dH}{d\varphi}\right)$$

par les équations de Lagrange et par les intégrales des aires. Enfin, la partie de dT qui dépend des rotations devant s'annuler par les intégrales des aires, on aura, après l'élimination,

$$\left(\frac{dT}{d\varphi}\right)d\varphi + \left(\frac{dT}{dc}\right)dc = 0,$$

d'où

$$K\frac{d\varphi}{dt} = \left(\frac{dT}{dc}\right) = \left(\frac{dH}{dc}\right).$$

On retombe ainsi sur le système canonique

$$(7) \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dH}{dp}, & \dfrac{dp}{dt} = -\dfrac{dH}{dx}, \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ K\dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{dH}{dc}, & K\dfrac{dc}{dt} = -\dfrac{dH}{d\varphi}, \end{cases}$$

que nous avons obtenu précédemment. On a enfin, par les équations de Lagrange,

$$\frac{d\Omega}{dt} = \left(\left(\frac{dT}{dK}\right)\right),$$

en considérant K comme la dérivée partielle $\frac{dT}{d\Omega'}$, introduite dans T par l'élimination des variables φ', I', Ω'. La constante K existe, en outre, dans l'expression de T comme facteur de la dérivée partielle $\frac{dT}{d\varphi'} = \mathrm{K}c$. Or, il est facile de voir que

$$\left(\frac{dT}{d\mathrm{K}c}\right) = \frac{1}{\mathrm{K}}\left(\frac{dT}{dc}\right).$$

En effet,

$$\frac{1}{\mathrm{K}}\left(\frac{dT}{dc}\right) = \left(\frac{dT}{d\mathrm{K}c}\right) + \frac{1}{\mathrm{K}}\left(\frac{dT}{d\cos\mathrm{I}}\right),$$

en considérant I comme une fonction de c qui existe dans T à côté de Kc; or les intégrales des aires montrent que, dans ce sens,

$$\left(\frac{dT}{d\mathrm{I}}\right) = -\frac{dT}{d\mathrm{I}} = 0;$$

d'où il suit qu'on obtient le même résultat en différentiant par rapport à (Kc) ou bien par rapport à $c = \cos\mathrm{I}$. Donc

$$z^0 = \Omega' + \varphi' c = \left(\left(\frac{dT}{d\mathrm{K}}\right)\right) + c\left(\frac{dT}{d\mathrm{K}c}\right) = \left(\frac{dT}{d\mathrm{K}}\right),$$

ou bien

$$z^0 = \frac{d\mathrm{H}}{d\mathrm{K}},$$

comme auparavant. La rotation autour de l'axe polaire est la dérivée partielle de la constante des forces vives par rapport à la constante des aires. Pour Ω on aura la quadrature

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{d\mathrm{H}}{d\mathrm{K}} - \frac{c}{\mathrm{K}}\frac{d\mathrm{H}}{dc}. \tag{9}$$

Au lieu de déterminer trois axes mobiles par trois équations entre les coordonnées, on peut se contenter de déterminer par deux équations le plan des xy, et prendre pour axe des z la normale à ce plan, pour

axe des x la ligne des nœuds. Dans ce cas, on a $\varphi = 0$, $x^0 = I'$, $y^0 = \Omega' \sin I$, $z^0 = \Omega' \cos I$, $z^0 = \Omega'$. Les intégrales des aires sont toujours

$$\frac{dT}{d\Omega'} = K, \quad \frac{dT}{dI'} = 0, \quad \frac{dT}{dI} = 0.$$

On a encore

$$\left(\frac{dT}{dI}\right) = -\frac{dT}{dI} = 0,$$

et cette équation montre qu'il est permis de remplacer I dans T par une fonction des autres variables *avant* la différentiation, c'est-à-dire que nous pourrons mettre pour I sa valeur tirée des intégrales des aires. On peut donc éliminer Ω', I' et I par ces intégrales et former ensuite le système canonique

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dH}{dp}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{dH}{dx}, \ldots.$$

Cela se voit d'ailleurs immédiatement par la comparaison des deux valeurs de dT :

$$\begin{aligned} dT &= \Sigma\left(x'dp - \frac{dT}{dx}dx\right) + \Omega' dK + I' d\frac{dT}{dI'} - \frac{dT}{dI}dI \\ &= \Sigma\left(\frac{dT}{dp}\right)dp + \Sigma\left(\frac{dT}{dx}\right)dx. \end{aligned}$$

On a ensuite

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{dH}{dK}. \tag{10}$$

Lorsqu'on fait $I = 0$, de sorte que l'axe polaire devient l'axe des z, on n'a que Ω' à éliminer par l'intégrale $\frac{dT}{d\Omega'} = K$. Les deux autres intégrales des aires, si elles existent, pourront servir ensuite à éliminer deux variables quelconques *après* la formation du système canonique. Dans le cas de deux corps, ces intégrales donnent $z = 0$, $z' = 0$; elles équivalent donc alors à une équation entre les coordonnées.

En résumé, on voit que les équations du mouvement peuvent tou-

jours être présentées sous la forme canonique après qu'on a employé les intégrales des aires à éliminer les rotations d'axes mobiles, et que le nombre des équations de condition que l'on gagne par l'usage de coordonnées mobiles dépasse d'une unité celui des variables nouvelles que l'on est obligé d'introduire; d'où il suit qu'en définitive le nombre des équations différentielles se trouve diminué de quatre unités par les intégrales des aires.

V.

Jusqu'ici nous avons supposé que les variables x', y', z' étaient réduites au plus petit nombre possible par une élimination préalable. Nous allons voir qu'il est encore facile de former les équations du mouvement quand ces variables sont liées par les trois équations du centre de gravité et par les trois qui déterminent les axes mobiles. Soient

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 0$$

les équations des axes. Si l'on ajoute l'expression

$$\alpha_1 \frac{df_1}{dt} + \alpha_2 \frac{df_2}{dt} + \alpha_3 \frac{df_3}{dt} + \beta_1 \Sigma m x' + \beta_2 \Sigma m y' + \beta_3 \Sigma m z'$$

à celle de la force vive, qui était

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2} \Sigma m(x' + y^0 z - z^0 y)^2 + \frac{1}{2} \Sigma m(y' + z^0 x - x^0 z)^2 + \frac{1}{2} \Sigma m(z' + x^0 y - y^0 x)^2,$$

la différentiation donne

$$\frac{d\mathrm{T}}{dx'} = p = m(x' + y^0 z - z^0 y + \beta_1) + \alpha_1 \frac{df_1}{dx} + \alpha_2 \frac{df_2}{dx} + \alpha_3 \frac{df_3}{dx},$$

$$\frac{d\mathrm{T}}{dy'} = q = m(y' + z^0 x - x^0 z + \beta_2) + \alpha_1 \frac{df_1}{dy} + \alpha_2 \frac{df_2}{dy} + \alpha_3 \frac{df_3}{dy},$$

$$\frac{d\mathrm{T}}{dz'} = r = m(z' + x^0 y - y^0 x + \beta_3) + \alpha_1 \frac{df_1}{dz} + \alpha_2 \frac{df_2}{dz} + \alpha_3 \frac{df_3}{dz}.$$

On tire de là

$$\Sigma p = \beta_1 \Sigma m + \alpha_1 \Sigma \frac{df_1}{dx} + \alpha_2 \Sigma \frac{df_2}{dx} + \alpha_3 \Sigma \frac{df_3}{dx},$$

$$\Sigma(ry - qz) = \frac{dT}{dx^0} + \alpha_1 \Sigma\left(y\frac{df_1}{dz} - z\frac{df_1}{dy}\right) + \alpha_2 \Sigma\left(y\frac{df_2}{dz} - z\frac{df_2}{dy}\right)$$
$$+ \alpha_3 \Sigma\left(y\frac{df_3}{dz} - z\frac{df_3}{dy}\right),$$

et ainsi de suite : en tout six équations linéaires pour exprimer les multiplicateurs α, β en fonction des variables x, y, z, p, q, r, et des quantités Ka, Kb, Kc, que l'on mettra à la place des dérivées $\frac{dT}{dx^0}, \ldots,$ afin de tenir compte des intégrales des aires. Ce procédé d'élimination ne modifie en rien le raisonnement que nous avons fait en supposant que les variables x', y', z' étaient réduites au plus petit nombre possible. En effet, les multiplicateurs α, β sont des fonctions linéaires des vitesses et des rotations, qui se déterminent par la condition, que six des dérivées p, q, r doivent s'annuler identiquement ; les autres dérivées p, q, r sont donc précisément celles que l'on aurait obtenues après avoir éliminé de T les six variables x', y', z' qui correspondent aux dérivées p, q, r qui s'annulent. L'avantage de notre procédé consiste en ce qu'il nous permet d'exprimer les multiplicateurs par les nouvelles variables p, q, r.

Les formules se simplifient beaucoup lorsqu'on prend pour axes mobiles les axes principaux d'inertie. Les équations de condition sont alors les suivantes :

$$\Sigma mx = 0, \quad \Sigma my = 0, \quad \Sigma mz = 0,$$
$$\Sigma myz = 0, \quad \Sigma mzx = 0, \quad \Sigma mxy = 0.$$

En ajoutant à T l'expression

$$\alpha_1 \Sigma m(yz' + zy') + \beta_1 \Sigma mx' + \ldots,$$

on trouve

$$p = m(x' + y^0 z - z^0 y + \beta_1 + \alpha_2 z + \alpha_3 y),$$
$$q = m(y' + z^0 x - x^0 z + \beta_2 + \alpha_3 x + \alpha_1 z),$$
$$r = m(z' + x^0 y - y^0 x + \beta_3 + \alpha_1 y + \alpha_2 x);$$

d'où

$$\Sigma p = \beta_1 \Sigma m, \quad \Sigma q = \beta_2 \Sigma m, \quad \Sigma r = \beta_3 \Sigma m,$$

$$\Sigma(ry - qz) = \frac{dT}{dx^0} + \alpha_1 \Sigma m(y^2 - z^2),$$

$$\Sigma(pz - rx) = \frac{dT}{dy^0} + \alpha_2 \Sigma m(z^2 - x^2),$$

$$\Sigma(qx - py) = \frac{dT}{dz^0} + \alpha_3 \Sigma m(x^2 - y^2).$$

Enfin

$$2T = \Sigma \frac{1}{m}(p - m\beta_1 - mz\alpha_2 - my\alpha_3)^2 + \ldots$$

ou bien

$$\begin{aligned} 2T = \Sigma \frac{p^2 + q^2 + r^2}{m} &- \frac{(\Sigma p)^2 + (\Sigma q)^2 + (\Sigma r)^2}{\Sigma m} \\ &+ \alpha_1^2 \Sigma m(y^2 + z^2) + \alpha_2^2 \Sigma m(z^2 + x^2) + \alpha_3^2 \Sigma m(x^2 + y^2) \\ &- 2\alpha_1 \Sigma(ry + qz) - 2\alpha_2 \Sigma(pz + rx) - 2\alpha_3 \Sigma(qx + py). \end{aligned}$$

Si, au lieu de prendre l'origine des coordonnées au centre de gravité, on rapportait le système à un point canonique, on aurait déjà éliminé par le fait les coordonnées et les vitesses de l'un des corps, et les multiplicateurs β n'entreraient pas dans les expressions des p, q, r; dans ce cas, il faudrait supprimer le second terme de T, qui dépend des trois sommes Σp, Σq, Σr.

Les relations ci-dessus donnent, en tenant compte des intégrales des aires,

$$\alpha_1 = -\frac{Ka - \Sigma(ry - qz)}{\Sigma m(y^2 - z^2)}.$$

Cette valeur étant substituée pour α_1, il vient

$$\begin{aligned} &\alpha_1^2 \Sigma m(y^2 + z^2) - 2\alpha_1 \Sigma(ry + qz) \\ &= \frac{\Sigma m y^2 (Ka + 2\Sigma qz)^2 + \Sigma m z^2 (Ka - 2\Sigma ry)^2 - \Sigma m(y^2 + z^2)[\Sigma(ry + qz)]^2}{[\Sigma m(y^2 - z^2)]^2}, \end{aligned}$$

et l'on trouve des expressions analogues pour les termes de T qui dépendent de α_2 et de α_3, en remplaçant les variables par une permutation circulaire.

Si, au lieu de rapporter les coordonnées aux trois axes principaux d'inertie, nous nous contentons d'en prendre un pour axe des z, et le plan principal correspondant pour plan des xy, le nœud de ce plan étant l'axe des x, nous n'avons que les deux équations $\Sigma myz = 0$, $\Sigma mxz = 0$, pour la détermination des axes mobiles, et nous ne pouvons éliminer par ces équations que quatre variables. En revanche, les intégrales des aires n'introduisent plus dans T que la constante K. On a maintenant $x^0 = I'$, $y^0 = \Omega' \sin I$, $z^0 = \Omega' \cos I$, et les intégrales des aires sont

$$\frac{dT}{d\Omega'} = K, \quad \frac{dT}{dI'} = 0, \quad \frac{dT}{dI} = 0.$$

L'expression de la force vive devient

$$\begin{aligned} 2T = \Sigma m(x' - y\Omega' \cos I + z\Omega' \sin I)^2 + \Sigma m(y' + x\Omega' \cos I - zI')^2 \\ + \Sigma m(z' + yI' - x\Omega' \sin I)^2. \end{aligned}$$

Par conséquent, si l'on fait abstraction des équations du centre de gravité (nous avons vu que cela est permis) et qu'on n'ajoute à T que l'expression $\alpha_1 \Sigma m(yz' + zy') + \alpha_2 \Sigma m(zx' + xz')$, il vient

$$\begin{aligned} p &= m(x' - y\Omega' \cos I + z\Omega' \sin I + \alpha_2 z), \\ q &= m(y' + x\Omega' \cos I - zI' + \alpha_1 z), \\ r &= m(z' - x\Omega' \sin I + yI' + \alpha_1 y + \alpha_2 x). \end{aligned}$$

On tire de là

$$\begin{aligned} \Sigma(ry - qz) &= \alpha_1 \Sigma m(y^2 - z^2) + \alpha_2 \Sigma mxy, \\ \Sigma(pz - rx) &= \alpha_2 \Sigma m(z^2 - x^2) - \alpha_1 \Sigma mxy + K \sin I, \\ \Sigma(qx - py) &= K \cos I. \end{aligned}$$

Ces relations permettent d'éliminer α_1, α_2 et I. On a d'abord

$$\begin{aligned} K \sin I + \alpha_2 \left[\Sigma m(z^2 - x^2) + \frac{\Sigma mxy \; \Sigma mxy}{\Sigma m(y^2 - z^2)} \right] \\ = \Sigma(pz - rx) + \frac{\Sigma mxy}{\Sigma m(y^2 - z^2)} \Sigma(ry - qz), \end{aligned}$$

et une expression analogue pour α_1; en les substituant dans T, on exprime la force vive par les variables x, y, z, p, q, r, I. Or, la relation

$$\left(\frac{d\mathrm{T}}{d\mathrm{I}}\right) = -\frac{d\mathrm{T}}{d\mathrm{I}} = 0$$

montre qu'il est permis de remplacer $\sin \mathrm{I}$ par sa valeur tirée de l'équation

$$\mathrm{K}^2 \sin^2 \mathrm{I} = \mathrm{K}^2 - [\Sigma(qx - py)]^2.$$

Ces formules se simplifient lorsqu'on n'a que trois corps. Dans ce cas, l'un des plans principaux d'inertie est le plan même des trois corps, et les deux équations de condition qui le déterminent se réduisent à celles-ci :

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 0, \quad z_3 = 0,$$

qui comprennent en même temps l'équation $\Sigma mz = 0$. On a donc $z = 0$, $z' = 0$, $r = 0$, et l'expression de T ne renferme la variable I que sous la forme du carré de $\sin \mathrm{I}$, de sorte que tout est rationnel. Nous allons considérer ce cas dans le paragraphe suivant.

VI.

L'expression de la force vive de trois corps, rapportés à des axes mobiles, est

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} 2\mathrm{T} &= \Sigma m(x' - y\Omega' \cos \mathrm{I})^2 + \Sigma m(y' + x\Omega' \cos \mathrm{I})^2 \\ &\quad + \Sigma m(y\mathrm{I}' - x\Omega' \sin \mathrm{I})^2, \end{aligned} \right.$$

si nous prenons pour plan des xy le plan des trois corps, et le nœud de ce plan pour axe des x. Les intégrales des aires sont

$$\frac{d\mathrm{T}}{d\Omega'} = \mathrm{K}, \quad \frac{d\mathrm{T}}{d\mathrm{I}'} = 0, \quad \frac{d\mathrm{T}}{d\mathrm{I}} = 0,$$

ou bien

$$\begin{aligned}\Sigma m(xy' - yx') + \Omega' \cos I \,\Sigma m(x^2 + y^2) &= K \cos I,\\ - I' \,\Sigma mxy + \Omega' \sin I \,\Sigma mx^2 &= K \sin I,\\ I' \,\Sigma my^2 - \Omega' \sin I \,\Sigma mxy &= 0.\end{aligned}$$

Il en résulte que l'on peut écrire

$$(12) \quad 2T = \Sigma m(x' - y\Omega' \cos I)^2 + \Sigma m(y' + x\Omega' \cos I)^2 + K\Omega' \sin^2 I,$$

et qu'on aura toujours

$$\frac{dT}{dI} = 0.$$

Les intégrales donnent

$$(13) \qquad \Omega' = \frac{MK}{m_1 m_2 m_3} \frac{\Sigma my^2}{4\Delta^2},$$

où M est la somme $m_1 + m_2 + m_3$, et Δ l'aire du triangle des trois corps. On trouve, en effet, que

$$\Sigma mx^2 . \Sigma my^2 - \Sigma mxy . \Sigma mxy = \Sigma m_1 m_2 (x_2 y_1 - x_1 y_2)^2 = \frac{m_1 m_2 m_3}{M} 4\Delta^2,$$

puisque

$$\frac{2\Delta}{M} = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{m_3} = \frac{y_2 x_3 - y_3 x_2}{m_1} = \frac{y_3 x_1 - y_1 x_3}{m_2}.$$

La dérivée Ω', ou la rotation autour de l'axe polaire, est donc indépendante des vitesses x', y'; elle est égale à une constante multipliée par le moment d'inertie du système autour de la ligne des nœuds, et divisée par le carré du triangle des trois corps; elle devient $\frac{0}{0}$ pour $\Delta = 0$, parce que le plan des trois corps cesse d'être déterminé quand les corps se trouvent sur une ligne droite.

Pour obtenir les équations du mouvement, nous devons prendre les dérivées partielles $p = \frac{dT}{dx'}$, $q = \frac{dT}{dy'}$, ce qui peut se faire sur l'une ou

sur l'autre des deux expressions de T données par les formules (11) et (12), puisque les variables x', y' n'existent que dans les deux premières parties, communes à ces formules. Aux équations linéaires ainsi obtenues il faut joindre les deux suivantes :

$$\frac{dT}{d\Omega'} = K, \quad \frac{dT}{dI'} = 0,$$

puis remplacer les x', y' et Ω', I' par les p, q et la constante K. La force vive est alors exprimée par les variables x, y, I, p, q, et nous devons prendre les dérivées de T par rapport aux variables x, y, p, q en traitant I comme une constante, puis mettre pour I sa valeur tirée des intégrales; ou bien, puisque

$$\left(\frac{dT}{dI}\right) = -\frac{dT}{dI} = 0,$$

comme nous l'avons vu plus haut, nous pouvons de suite remplacer I par sa valeur en fonction des x, y, p, q. La différentiation donne, en ajoutant à T l'expression $\alpha\Sigma mx' + \beta\Sigma my'$, pour tenir compte des équations du centre de gravité,

$$p = m(x' - y\Omega'\cos I + \alpha),$$
$$q = m(y' + x\Omega'\cos I + \beta),$$

d'où

$$\Sigma p = \alpha M, \quad \Sigma q = \beta M, \quad \Sigma(qx - py) = K\cos I,$$

et, en substituant ces expressions dans la formule (12), on trouve

$$(14) \qquad 2T = \Sigma\frac{p^2 + q^2}{m} - \frac{(\Sigma p)^2 + (\Sigma q)^2}{M} + \Omega' K - \frac{\Omega'}{K}[\Sigma(qx - py)]^2,$$

où il faut mettre pour Ω' sa valeur tirée de l'équation (13), qui peut s'écrire

$$(15) \qquad \Omega' = K\frac{M(m_1 y_1^2 + m_2 y_2^2) - m_1 m_2 (y_1 - y_2)^2}{M m_1 m_2 (y_1 x_2 - y_2 x_1)^2}.$$

En même temps nous pouvons supposer $p_3 = q_3 = 0$, de sorte que T

ne renferme que les huit variables $x_1, y_1, x_2, y_2, p_1, q_1, p_2, q_2$. Ces dernières (les p, q) sont les vitesses relatives des corps m_1, m_2 par rapport à m_3, car nous avons

$$\frac{p_1}{m_1} = x'_1 - x'_3 - (y_1 - y_3)\Omega' \cos I, \ldots,$$

ou bien

$$p_1 = -m_1 \dot{\mathrm{x}}_2, \quad p_2 = m_2 \dot{\mathrm{x}}_1,$$
$$q_1 = -m_1 \dot{\mathrm{y}}_2, \quad q_2 = m_2 \dot{\mathrm{y}}_1,$$

en désignant, comme nous l'avons déjà fait, par les lettres romaines $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3, \ldots$ les différences $x_2 - x_3, x_3 - x_1, x_1 - x_2, \ldots$, et en exprimant les vitesses réelles par des lettres pointées.

Si nous nous reportons à la transformation orthogonale contenue dans la formule

$$(2) \qquad \mathrm{m}\,\Sigma \frac{1}{m}((\mathrm{x})) = \frac{1}{\mathrm{m}}\Sigma m((x)),$$

où

$$\mathrm{m}^2 = \frac{m_1 m_2 m_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m_1 m_2 m_3}{\mathrm{M}},$$

il est évident que nous pouvons écrire mx pour mx, et my pour my dans les formules (11), (12), (13), et que l'équation (14) subsistera, si les lettres p, q signifient les dérivées $\frac{m}{\mathrm{m}}\frac{d\mathrm{T}}{d\mathrm{x}}, \frac{m}{\mathrm{m}}\frac{d\mathrm{T}}{d\mathrm{y}}$, ou si nous remplaçons p, q par $m\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{m}}, m\frac{\mathrm{q}}{\mathrm{m}}$, ce qui donne

$$(16) \quad \begin{cases} 2\mathrm{T} = \dfrac{\mathrm{M}}{m_1 m_2 m_3}\Sigma m(\mathrm{p}^2 + \mathrm{q}^2) - \dfrac{(\Sigma m\mathrm{p})^2 + (\Sigma m\mathrm{q})^2}{m_1 m_2 m_3} \\ \qquad + \mathrm{K}\Omega' - \dfrac{\Omega'}{\mathrm{K}}[\Sigma(\mathrm{qx} - \mathrm{py})]^2. \end{cases}$$

Pour Ω' il faut mettre sa valeur en fonction des x, y,

$$(17) \qquad \Omega' = \frac{\mathrm{K}}{4\Delta^2}\Sigma\frac{1}{m}\mathrm{y}^2 = \mathrm{K}\frac{\frac{1}{m_1}\mathrm{y}_1^2 + \frac{1}{m_2}\mathrm{y}_2^2 + \frac{1}{m_3}(\mathrm{y}_1 + \mathrm{y}_2)^2}{(\mathrm{y}_1\mathrm{x}_2 - \mathrm{y}_2\mathrm{x}_1)^2}.$$

Les variables p, q sont les vitesses des corps m_1, m_2 par rapport au centre de gravité, car en faisant $p_3 = q_3 = 0$, on a

$$p_1 = m_2 \dot{x}_2, \quad p_2 = -m_1 \dot{x}_1,$$
$$q_1 = m_2 \dot{y}_2, \quad q_2 = -m_1 \dot{y}_1.$$

Quand le mouvement des trois corps a été réduit à un mouvement de deux corps par une transformation orthogonale (par exemple, en prenant pour origine un point canonique), on n'aura qu'à supprimer dans les formules (14) et (16) les termes qui proviennent des multiplicateurs α, β, c'est-à-dire Σp, Σq, et $\Sigma m\mathrm{p}$, $\Sigma m\mathrm{q}$. Les équations finales seront toujours

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dH}{dp}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{dH}{dx}, \ldots;$$

et

$$\frac{d\mathrm{x}}{dt} = \frac{dH}{d\mathrm{p}}, \quad \frac{d\mathrm{p}}{dt} = -\frac{dH}{d\mathrm{x}}, \ldots.$$

On peut encore remplacer les coordonnées x, y par des coordonnées polaires (rayons vecteurs et azimuts) sans rien changer à la marche générale des opérations. Si l'on pose

$$x = \rho\cos\upsilon, \quad y = \rho\sin\upsilon,$$

la formule (12) devient

$$(18) \qquad 2T = \Sigma m\rho'^2 + \Sigma m\rho^2(\Omega'\cos I + \upsilon')^2 + K\Omega'\sin^2 I,$$

et (13) donne

$$(19) \qquad \Omega' = \frac{K}{M}\frac{m_3}{m_1 m_2}\frac{\Sigma m\rho^2\sin^2\upsilon}{\rho_1^2\rho_2^2\sin^2(\upsilon_1 - \upsilon_2)}.$$

Pour simplifier, je supposerai que l'origine est un point canonique; alors nous n'avons que deux corps à considérer, et

$$(20) \qquad \Omega' = \frac{K}{\sin^2(\upsilon_1 - \upsilon_2)}\left(\frac{\sin^2\upsilon_1}{m_2\rho_2^2} + \frac{\sin^2\upsilon_2}{m_1\rho_1^2}\right).$$

La différentiation donne

$$\varpi = \frac{dT}{d\rho'} = m\rho', \quad \chi = \frac{dT}{d\upsilon'} = m\rho^2(\Omega'\cos I + \upsilon'),$$

d'où

$$\chi_1 + \chi_2 = \Sigma m\rho^2(\Omega'\cos I + \upsilon') = K\cos I,$$

en vertu des intégrales des aires. On trouve ainsi

$$(21) \qquad 2T = \frac{\varpi_1^2}{m_1} + \frac{\varpi_2^2}{m_2} + \frac{\chi_1^2}{m_1\rho_1^2} + \frac{\chi_2^2}{m_2\rho_2^2} + \frac{\Omega'}{K}[K^2 - (\chi_1 + \chi_2)^2],$$

et

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{dH}{d\varpi}, \quad \frac{d\varpi}{dt} = -\frac{dH}{d\rho},$$
$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{dH}{d\chi}, \quad \frac{d\chi}{dt} = -\frac{dH}{d\upsilon}.$$

C'est le second système de Bour. On peut obtenir le premier système de Bour en faisant

$$\upsilon_1 - \upsilon_2 = \omega, \quad \upsilon_1 + \upsilon_2 = 2\varphi,$$

d'où

$$\upsilon_1 = \varphi + \frac{1}{2}\omega, \quad \upsilon_2 = \varphi - \frac{1}{2}\omega;$$

ω est l'angle compris entre les vecteurs ρ_1, ρ_2, et φ l'azimut de la bissectrice de cet angle. On a évidemment

$$\sigma = \frac{dT}{d\omega'} = \frac{1}{2}(\chi_1 - \chi_2),$$
$$\pi = \frac{dT}{d\varphi'} = \chi_1 + \chi_2 = K\cos I.$$

Il en résulte pour la force vive l'expression

$$(22) \quad \begin{cases} 2T = \dfrac{\varpi_1^2}{m_1} + \dfrac{\varpi_2^2}{m_2} + \dfrac{\left(\sigma + \frac{1}{2}\pi\right)^2}{m_1\rho_1^2} + \dfrac{\left(\sigma - \frac{1}{2}\pi\right)^2}{m_2\rho_2^2} \\ \qquad + \dfrac{K^2 - \pi^2}{\sin^2\omega}\left[\dfrac{\sin^2\left(\varphi + \frac{1}{2}\omega\right)}{m_2\rho_2^2} + \dfrac{\sin^2\left(\varphi - \frac{1}{2}\omega\right)}{m_1\rho_1^2}\right], \end{cases}$$

et

$$\frac{d\rho_1}{dt}=\frac{dH}{d\varpi_1},\quad \frac{d\varpi_1}{dt}=-\frac{dH}{d\rho_1},\quad \frac{d\rho_2}{dt}=\frac{dH}{d\varpi_2},\quad \frac{d\varpi_2}{dt}=-\frac{dH}{d\rho_2},$$
$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{dH}{d\sigma},\quad \frac{d\sigma}{dt}=-\frac{dH}{d\omega},\quad \frac{d\varphi}{dt}=\frac{dH}{d\pi},\quad \frac{d\pi}{dt}=-\frac{dH}{d\varphi}.$$

C'est le premier système, ou « système provisoire » de Bour, qui désigne les variables par les lettres q_1, q_2, p_1, p_2, u_3, u_4, l_3, l_4.

Lorsqu'on veut prendre l'origine au centre de gravité, et les axes principaux d'inertie pour axes des xy, on aura, pour trois corps, $z=0$, et

$$2T=\Sigma m(x'-z^0y)^2+\Sigma m(y'+z^0x)^2+\Sigma m(x^0y-y^0x)^2.$$

En remplaçant les x, y par les x, y, et en substituant pour le dernier terme de T sa valeur tirée des intégrales des aires, nous avons

$$(23)\qquad 2T=\mathrm{m}^2\Sigma\frac{1}{m}(\mathrm{x}'-z^0\mathrm{y})^2+\mathrm{m}^2\Sigma\frac{1}{m}(\mathrm{y}'+z^0\mathrm{x})^2+K\Omega'\sin^2 I.$$

Nous pouvons maintenant introduire les trois distances mutuelles r_1, r_2, r_3 des trois corps, et poser

$$\mathrm{x}=r\cos u,\quad \mathrm{y}=r\sin u.$$

Alors la force vive devient

$$(23\ bis)\qquad 2T=\mathrm{m}^2\Sigma\frac{r'^2}{m}+\mathrm{m}^2\Sigma\frac{r^2}{m}(z^0+u')^2+K\Omega'\sin^2 I,$$

où $z^0=\Omega'\cos I+\varphi'$, et

$$\Omega'=\frac{K}{4\Delta^2}\Sigma\frac{r^2}{m}\sin^2(u+\varphi).$$

L'une des intégrales est

$$(24)\qquad \frac{dT}{dz^0}=\mathrm{m}^2\Sigma\frac{r^2}{m}(z^0+u')=K\cos I.$$

Les équations de condition sont les suivantes

$$(25)\qquad \Sigma r\cos u = 0,\quad \Sigma r\sin u = 0,\quad \Sigma\frac{r^2}{m}\sin 2u = 0;$$

elles donnent

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned} &\Sigma r'\cos u - \Sigma r\sin u.u' = 0,\\ &\Sigma r'\sin u + \Sigma r\cos u.u' = 0,\\ &\Sigma\frac{rr'}{m}\sin 2u + \Sigma\frac{r^2}{m}\cos 2u.u' = 0.\end{aligned}\right.$$

Si l'on pose

$$\Sigma\frac{r^2}{m}\cos 2u = \mathrm{R},$$

on trouve, par la troisième des équations (25),

$$\mathrm{R}^2 = \Sigma\left(\frac{r^2}{m}\right)^2 + 2\,\Sigma\frac{r_1^2 r_2^2}{m_1 m_2}\cos 2(u_1 - u_2).$$

Or, nous avons, dans le triangle des trois corps,

$$\cos(u_1 - u_2) = \frac{r_3^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1 r_2},\quad \sin(u_1 - u_2) = \frac{2\Delta}{r_1 r_2},\ \ldots$$

En substituant, il vient

$$(27)\qquad \mathrm{R}^2 = \left(\Sigma\frac{r^2}{m}\right)^2 - \frac{16\Delta^2}{\mathrm{m}^2}.$$

On trouve ensuite

$$\begin{aligned}\mathrm{R}\sin 2u_1 &= 2\Delta\left(\frac{m_2 - m_3}{m_2 m_3} + \frac{m_2 + m_3}{m_2 m_3}\,\frac{r_3^2 - r_2^2}{r_1^2}\right),\\ \mathrm{R}\cos 2u_1 &= \Sigma\frac{r^2}{m} - \frac{m_2 + m_3}{m_2 m_3}\,\frac{8\Delta^2}{r_1^2},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

et

$$(28)\qquad \Omega' = \frac{\mathrm{K}}{8\Delta^2}\left(\Sigma\frac{r^2}{m} - \mathrm{R}\cos 2\varphi\right).$$

On a d'ailleurs, par une formule bien connue,

$$16\Delta^2 = (r_1 + r_2 + r_3)(r_1 + r_2 - r_3)(r_1 - r_2 + r_3)(-r_1 + r_2 + r_3);$$

d'où il suit que Ω' se trouve ici exprimé par les trois distances et par l'angle φ. En désignant par A, B, C les moments d'inertie principaux, nous avons

$$C = A + B = \mathrm{m}^2 \Sigma \frac{r^2}{m}, \quad B - A = \mathrm{m}^2 R, \quad AB = 4\mathrm{m}^2\Delta^2, \quad \frac{1}{2}\frac{d^2C}{dt^2} = U + 2H.$$

A présent nous pouvons différentier T, en ajoutant à l'expression (23 *bis*) les trois équations (26), multipliées respectivement par les facteurs α, β, γ, qui seront déterminés de manière que les dérivées de T par rapport aux trois variables u' s'annulent. Donc

$$p = \frac{dT}{dr'} = \frac{\mathrm{m}^2}{m} r' + \gamma \frac{r}{m} \sin 2u + \alpha \cos u + \beta \sin u,$$

$$0 = \frac{1}{r}\frac{dT}{du'} = \frac{\mathrm{m}^2}{m} r(z^0 + u') + \gamma \frac{r}{m} \cos 2u - \alpha \sin u + \beta \cos u,$$

$$\pi = \frac{dT}{d\varphi'} = \mathrm{m}^2 \Sigma \frac{r^2}{m}(z^0 + u').$$

On tire de là

$$\Sigma mp \cos u = \alpha M, \quad \Sigma mp \sin u = \beta M,$$

d'où

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} M^2(\alpha^2 + \beta^2) &= \Sigma m^2 p^2 + 2\Sigma m_1 m_2 p_1 p_2 \cos(u_1 - u_2) \\ &= (\Sigma mp)^2 - (\Sigma r)\Sigma m_1 m_2 p_1 p_2 \frac{r_1 + r_2 - r_3}{r_1 r_2}. \end{aligned} \right.$$

En tenant compte de (24), il vient

$$(30) \qquad \gamma R = - K \cos I = - \pi.$$

On trouve encore

$$\Sigma pr = \mathfrak{m}^2 \Sigma \frac{rr'}{m}, \quad \Sigma pr \sin 2u + \frac{\pi}{R} \Sigma \frac{r^2}{m} = \mathfrak{z}^0 \mathfrak{m}^2 R.$$

L'expression de la force vive devient

$$(31) \quad \left\{ \begin{aligned} 2T &= \frac{M}{m_1 m_2 m_3} \left[\Sigma mp^2 + \gamma^2 \Sigma \frac{r^2}{m} - 2\gamma \Sigma pr \sin 2u - \frac{M^2(\alpha^2 + \beta^2)}{M} \right] \\ &\quad + K\Omega' \sin^2 I \\ &= \frac{M}{m_1 m_2 m_3} \left[\Sigma mp^2 + \frac{\pi^2}{R^2} \Sigma \frac{r^2}{m} + \frac{2\pi}{R} \Sigma pr \sin 2u \right. \\ &\qquad \left. - \frac{(\Sigma mp)^2 - (r_1 + r_2 + r_3) \Sigma m_1 m_2 p_1 p_2 \frac{r_1 + r_2 - r_3}{r_1 r_2}}{M} \right] \\ &\quad + \frac{K^2 - \pi^2}{8\Delta^2} \left(\Sigma \frac{r^2}{m} - R \cos 2\varphi \right). \end{aligned} \right.$$

Il faut remplacer $\sin 2u$ par sa valeur en fonction des distances :

$$\sin 2u_1 = \frac{2\Delta}{R} \left(\frac{m_2 - m_3}{m_2 m_3} + \frac{m_2 + m_3}{m_2 m_3} \frac{r_3^2 - r_2^2}{r_1^2} \right),$$

. . . .

Ensuite on a

$$(32) \qquad H = T - \Sigma \frac{m_1 m_2}{r_3},$$

et

$$(33) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{dr_1}{dt} = \frac{dH}{dp_1}, \quad \frac{dr_2}{dt} = \frac{dH}{dp_2}, \quad \frac{dr_3}{dt} = \frac{dH}{dp_3}, \\ &\frac{dp_1}{dt} = -\frac{dH}{dr_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{dH}{dr_2}, \quad \frac{dp_3}{dt} = -\frac{dH}{dr_3}, \\ &\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dH}{d\pi}, \quad \frac{d\pi}{dt} = -\frac{dH}{d\varphi}. \end{aligned} \right.$$

Ce système canonique comprend les distances mutuelles des trois corps, l'angle φ que l'un des axes d'inertie forme avec le nœud du plan des trois corps, et les quatre variables conjuguées p_1, p_2, p_3, π; la dernière est le cosinus de l'inclinaison du plan. La solution de ce système serait donnée par sept intégrales qui permettraient d'exprimer les huit variables par l'une d'entre elles, par exemple φ; on trouverait alors le temps t et le nœud Ω par les quadratures

$$t = \int \frac{d\varphi}{\frac{dH}{d\pi}}, \quad \Omega = \int \frac{dH}{dK}\, dt.$$

L'une de ces intégrales est connue; c'est celle des forces vives, $H = \text{const}$. Les deux quadratures et les trois intégrales des aires complètent le nombre de douze intégrales que demande le problème des trois corps. Il est d'ailleurs facile d'appliquer ces résultats à l'équation aux dérivées partielles $\nabla W = U + H$, dont la solution W fournit les intégrales du problème. Au lieu de huit équations différentielles ordinaires, on obtient alors une équation aux dérivées partielles à quatre variables indépendantes.

Je donnerai encore ici l'expression de T pour le cas général où les axes sont déterminés par une équation quelconque, $f(r, u) = 0$, à laquelle s'ajoutent les relations $\Sigma r \sin u = 0$, $\Sigma r \cos u = 0$. Je désignerai par ρ, υ les dérivées partielles $\frac{df}{dr}$, $\frac{df}{du}$; en suivant la même marche que précédemment, nous avons

$$p + \gamma\rho = \mathrm{m}^2 \frac{r'}{m} + \alpha \sin u + \beta \cos u,$$

$$\frac{1}{r}(q + \gamma\upsilon) = \mathrm{m}^2 \frac{r}{m}(u' + z^0) + \alpha \cos u - \beta \sin u,$$

$$\pi = \mathrm{m}^2 \Sigma \frac{r^2}{m}(u' + z^0),$$

d'où

$$\gamma = \frac{\pi - \Sigma q}{\Sigma \upsilon},$$

et, en écrivant r, r_1, r_2 à la place de r_1, r_2, r_3,

$$(34)\quad\left\{\begin{aligned}
2\mathrm{T} = \Sigma\frac{1}{m_2}\Big[p^2 + p_1^2 + \frac{q^2}{r^2} + \frac{q_1^2}{r_1^2} - 2\left(pp_1 + \frac{qq_1}{rr_1}\right)\cos(u-u_1)&\\
+ 2\left(\frac{p_1 q}{r} - \frac{pq_1}{r_1}\right)\sin(u-u_1)\Big]&\\
+\gamma^2\Sigma\frac{1}{m_2}\Big[\rho^2 + \rho_1^2 + \frac{\upsilon^2}{r^2} + \frac{\upsilon_1^2}{r_1^2} - 2\left(\rho\rho_1 + \frac{\upsilon\upsilon_1}{rr_1}\right)\cos(u-u_1)&\\
+ 2\left(\frac{\rho_1\upsilon}{r} - \frac{\rho\upsilon_1}{r_1}\right)\sin(u-u_1)\Big]&\\
+2\gamma\Sigma\frac{1}{m_2}\Big[p\rho + p_1\rho_1 + \frac{q\upsilon}{r^2} + \frac{q_1\upsilon_1}{r_1^2}&\\
-\left(p\rho_1 + p_1\rho + \frac{q\upsilon_1 + q_1\upsilon}{rr_1}\right)\cos(u-u_1)&\\
+\left(\frac{p_1\upsilon + q\rho_1}{r} - \frac{p\upsilon_1 + q_1\rho}{r_1}\right)\sin(u-u_1)\Big]&\\
+\frac{\mathrm{K}^2-\pi}{4\Delta^2}\Sigma\frac{r^2}{m}\sin^2(u+\varphi).&
\end{aligned}\right.$$

Dans cette expression nous pouvons annuler trois des variables p, q, par exemple q, q_1, q_2, à la condition d'éliminer en même temps les variables conjuguées (u, u_1, u_2). On peut aussi prendre simplement $f = u_2 = 0$, ce qui donne

$$q_2 = 0,\quad \upsilon_2 = 1,\quad \upsilon = \upsilon_1 = \rho = \rho_1 = \rho_2 = 0.$$

L'angle φ est alors l'azimut de la distance r_2, compté à partir du nœud, et u, u_1 sont deux angles du triangle Δ. On a $\gamma = \pi$, et

$$\begin{aligned}
2\mathrm{T} = \Sigma\frac{p^2 + p_1^2 - 2pp_1\cos(u-u_1)}{m_2} + \frac{4\pi\Delta}{r_2^2}\left(\frac{p}{m_1 r} - \frac{p_1}{mr_1}\right)&\\
+\frac{m+m_1}{mm_1}\frac{\pi^2}{r_2^2} + \frac{\mathrm{K}^2-\pi^2}{4\Delta^2}\Sigma\frac{r^2}{m}\sin^2(u+\varphi).&
\end{aligned}$$

Si le mouvement des trois corps avait lieu dans un plan, on aurait $\pi = \mathrm{K}$, et

$$(35)\quad\left\{\begin{aligned}
\mathrm{H} = \Sigma\frac{1}{2m_2}\left(p^2 + p_1^2 + pp_1\frac{r^2 + r_1^2 - r_2^2}{rr_1}\right) + \frac{2\mathrm{K}\Delta}{r_2^2}\left(\frac{p}{m_1 r} - \frac{p_1}{mr_1}\right)&\\
+\frac{m+m_1}{2mm_1}\frac{\mathrm{K}^2}{r_2^2} - \Sigma\frac{mm_1}{r_2}.&
\end{aligned}\right.$$

L'angle $\Omega + \varphi$ serait donné (p. 197, 212) par l'équation

$$z^0 = \Omega' + \varphi' = \frac{dH}{dK}.$$

P. S. — Pendant l'impression de ce travail, j'ai eu connaissance d'une Note de M. Scheibner, publiée en 1868 dans le *Journal de Crelle-Borchardt*, t. LXVIII, 3e cahier, et qui renferme l'énoncé du système (33). L'auteur le donne, sans démonstration, comme point de départ de formules à l'aide desquelles il représente le mouvement d'un corps de masse nulle, attiré par deux corps tels que le Soleil et une planète.

M. Scheibner donne encore un autre système, dans lequel figurent les moments d'inertie. J'en ai cherché la démonstration, qui peut être présentée comme il suit. Si nous désignons toujours par x, y les différences des coordonnées rapportées aux axes d'inertie et au centre de gravité, nous avons

$$\Sigma \mathrm{x} = 0, \quad \Sigma \mathrm{y} = 0, \quad \Sigma \frac{\mathrm{xy}}{m} = 0.$$

Les moments d'inertie sont

$$\mathrm{A} = \mathrm{m}^2 \Sigma \frac{\mathrm{y}^2}{m}, \quad \mathrm{B} = \mathrm{m}^2 \Sigma \frac{\mathrm{x}^2}{m}, \quad \mathrm{C} = \mathrm{A} + \mathrm{B} = \mathrm{m}^2 \Sigma \frac{r^2}{m},$$

où $\mathrm{m}^2 = \frac{m_1 m_2 m_3}{\mathrm{M}}$. Ces relations nous permettent d'exprimer les coordonnées par les quantités A, B et par un angle ψ, en posant

$$\sqrt{\frac{m_2 m_3}{m_2 + m_3}}\, \mathrm{x}_1 = \sqrt{\mathrm{B}} \cos(\psi + \beta_1), \quad \sqrt{\frac{m_2 m_3}{m_2 + m_3}}\, \mathrm{y}_1 = \sqrt{\mathrm{A}} \sin(\psi + \beta_1), \ldots,$$

pourvu que les différences des constantes β_1, β_2, β_3 soient déterminées par les formules

$$\operatorname{tang}(\beta_2 - \beta_3) = \frac{m_1}{\mathrm{m}}, \quad \operatorname{tang}(\beta_3 - \beta_1) = \frac{m_2}{\mathrm{m}}, \quad \operatorname{tang}(\beta_1 - \beta_2) = \frac{m_3}{\mathrm{m}},$$

et qu'on donne le signe négatif aux radicaux par lesquels s'expriment

les sinus et les cosinus de ces différences. Il s'ensuit que

$$\frac{x_1^2}{B}+\frac{y_1^2}{A}=\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3},\dots.$$

Si nous définissons l'angle ψ par l'équation

$$\tang 2\psi = \frac{m M \Sigma x y}{\Sigma m_1 (m_2 - m_3) x_1 y_1} = \frac{\Sigma m_1 (m_2 - m_3) r_1^2}{m \Sigma \dfrac{m_2 m_3 - m_1^2}{m_1} r_1^2},$$

nous avons

$$\tang 2\beta_1 = \frac{m M (m_2 - m_3)}{m_3^2 (m_1 - m_2) - m_2^2 (m_3 - m_1)},\dots.$$

La différentiation donne

$$x' = \frac{1}{2} x \frac{B'}{B} - y \sqrt{\frac{B}{A}} \psi', \quad y' = \frac{1}{2} y \frac{A'}{A} + x \sqrt{\frac{A}{B}} \psi',$$

et, en substituant dans la formule (23), il vient

$$2T = \frac{A'^2}{4A} + \frac{B'^2}{4B} + C(\psi'^2 + z^{0\,2}) - 4\sqrt{AB}\,\psi' z^0 + K^2 \sin^2 I \left(\frac{\sin^2\varphi}{A} + \frac{\cos^2\varphi}{B}\right).$$

Si nous désignons par A_0, B_0, ϖ, π les dérivées partielles de $\bar{T}$, prises par rapport à A', B', ψ' et φ' (ou z^0), nous avons $\pi = K \cos I$, et

$$T = 2AA_0^2 + 2BB_0^2 - \frac{2\sqrt{AB}}{(A-B)^2}\pi\varpi + \frac{C}{(A-B)^2}\frac{\pi^2+\varpi^2}{2}$$
$$+ \frac{K^2-\pi^2}{2}\left(\frac{\sin^2\varphi}{A} + \frac{\cos^2\varphi}{B}\right).$$

Telle est l'expression de T que M. Scheibner a publiée sans démonstration.

On aurait en même temps

$$U = \Sigma \frac{m_2 m_3 \sqrt{\dfrac{m_2 m_3}{m_2 + m_3}}}{\sqrt{A \sin^2(\psi + \beta_1) + B \cos^2(\psi + \beta_1)}}.$$

Je transformerai ce système en posant

$$C = \rho^2, \quad A = \rho^2 \sin^2 \frac{1}{2}\alpha, \quad B = \rho^2 \cos^2 \frac{1}{2}\alpha,$$

où ρ est le rayon de gyration des trois masses dans leur plan. L'angle α peut s'exprimer par les trois distances; nous avons

$$\rho^2 \sin\alpha = 2\sqrt{AB} = 4\,\mathrm{m}\Delta, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{m}^2 \sin^2\alpha = \frac{\Sigma(2 r_1^2 r_2^2 - r_1^4)}{\left(\Sigma \frac{r^2}{m}\right)^2}.$$

Ensuite

$$2T = \rho'^2 + \rho^2 \left(\frac{\alpha'^2}{4} + \psi'^2 + z^{02} + 2\psi' z^0 \sin\alpha\right) + (K^2 - \pi^2)\left(\frac{\sin^2\varphi}{A} + \frac{\cos^2\varphi}{B}\right),$$

puis, en désignant par ρ_0, α_0, les dérivées partielles de T, prises par rapport à ρ' et à α',

$$\rho^2 T = \frac{1}{2}\rho^2\rho_0^2 + 2\alpha_0^2 + \frac{\varpi^2 + \pi^2 - 2\varpi\pi \sin\alpha}{2\cos^2\alpha} + (K^2 - \pi^2)\frac{1 - \cos\alpha \cos 2\varphi}{\sin^2\alpha}.$$

et

$$\rho U = \Sigma \frac{m_1 m_3 \sqrt{\frac{2 m_2 m_3}{m_2 + m_3}}}{\sqrt{1 + \cos\alpha \cos 2(\psi + \beta_1)}}.$$

Les variables ρ_0, α_0, ϖ, π sont les conjuguées de ρ, α, ψ, φ. Ce système ne diffère que légèrement de celui que M. Weiler vient de faire connaître dans les *Nouvelles astronomiques*. L'équation

$$\frac{d\rho_0}{dt} = -\frac{dH}{d\rho},$$

donne

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\rho^2}{dt^2} = U + 2H.$$

Je viens de m'apercevoir aussi que, dans le Mémoire posthume intitulé *Nova methodus æquationes differentiales partiales... integrandi*, Jacobi a déjà énoncé ce fait, qu'une seule intégrale des aires permet d'éliminer deux variables. Il le rattache à sa théorie sur les intégrales qui satisfont à des relations de la forme $(\alpha, \beta) = 0$.

VII.

Il y a quelque intérêt à voir ce qu'on peut obtenir en considérant les orbites instantanées que deux corps décrivent autour du troisième.

Pour déterminer le mouvement relatif des trois corps, il suffit de connaître neuf quantités : deux distances, deux vitesses et cinq angles. On peut, par exemple, se donner les rayons r, r_1 des corps m, m_1, rapportés au troisième, les vitesses relatives v, v_1, les quatre angles que ces droites forment avec l'intersection des orbites, enfin l'inclinaison relative λ des orbites, ou l'angle s compris entre r et r_1. On peut aussi combiner s (ou λ) avec les coordonnées p, q, p_1, q_1, prises parallèlement et perpendiculairement à l'intersection des orbites, et avec les composantes analogues des vitesses, ω, ϖ, ω_1, ϖ_1, ou bien encore remplacer ω, ϖ par la vitesse radiale r' et la vitesse aréolaire f.

En désignant par ρ la distance de m à m_1, et faisant

$$p = r\cos w, \quad \omega = mr'\cos w - \frac{f}{r}\sin w,$$

$$q = r\sin w, \quad \varpi = mr'\sin w + \frac{f}{r}\cos w,$$

on aura

$$r^2 = p^2 + q^2, \quad r_1^2 = p_1^2 + q_1^2, \quad rr_1\cos s = pp_1 + qq_1\cos\lambda,$$

$$\rho^2 = r^2 + r_1^2 - 2rr_1\cos s = (p - p_1)^2 + q^2 + q_1^2 - 2qq_1\cos\lambda,$$

$$m^2v^2 = \omega^2 + \varpi^2 = m^2r'^2 + \frac{f^2}{r^2},$$

$$mrr' = p\omega + q\varpi, \quad f = p\varpi - q\omega.$$

Il est facile de s'assurer que les dérivées de ces variables ne dépendent que des neuf éléments du mouvement relatif. La dérivée de r est r', celle de l'angle s est la différence des vitesses aréolaires projetées sur le plan des trois corps. Si l'on différentie l'équation $rr' = xx' + yy' + zz'$, on trouve

$$rr'' = \frac{f^2}{m^2r^2} + xx'' + yy'' + zz'',$$

et en substituant pour x'', y'', z'' leurs valeurs tirées des équations du mouvement, on voit que le dernier terme de rr'' est une fonction homogène des coordonnées qui ne peut dépendre que des variables r, r_1, s. Les variations des quantités r, r', s ne renferment donc aucune inconnue nouvelle. Soient maintenant α, β, γ les cosinus de la normale à l'orbite f, et a, b, c les cosinus de la composante $\frac{f}{r}$, normale au rayon r, on aura

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0, \quad \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0,$$
$$f' = \alpha(f\alpha)' + \beta(f\beta)' + \gamma(f\gamma)',$$
$$fr^0 = a(f\alpha)' + b(f\beta)' + c(f\gamma)',$$

en désignant par r^0 la rotation de l'orbite f autour du rayon vecteur. Or

$$(f\gamma)' = m(xy'' - x''y) = mm_1(xy_1 - x_1y)\left(\frac{1}{\rho_3} - \frac{1}{r_1^3}\right)\ldots,$$

et il s'ensuit que les quantités f' et fr^0 sont respectivement proportionnelles aux deux projections du triangle Δ des trois corps sur l'orbite f et sur un plan perpendiculaire à f. En posant

$$R = \frac{1}{r^3} - \frac{1}{\rho^3}, \quad R_1 = \frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{\rho^3}, \quad \sigma = \cos s, \quad M = 1 + m + m_1,$$

nous aurons

$$r'' = \frac{f^2}{m^2 r} - \frac{M}{r^2} + m_1(rR - r_1 R_1 \sigma),$$
$$f' = -\, mm_1 \Delta \cos\eta\, R_1,$$
$$fr^0 = \quad mm_1 \Delta \sin\eta\, R_1,$$
$$rr_1\sigma' = \Delta\cos\eta\,\frac{f}{mr^2} - \Delta\cos\eta_1\,\frac{f_1}{m_1 r_1^2},$$

et

$$\Delta\sin\eta = rq_1\sin\lambda, \quad -\Delta\cos\eta = p_1 q - pq_1\cos\lambda.$$

Comme les variations des angles du système ne peuvent dépendre que du déplacement des rayons vecteurs et de la rotation des orbites.

c'est-à-dire des quantités f et r^0, on voit que les dérivées de nos variables ne renfermeront aucune inconnue nouvelle. C'est précisément le résultat auquel M. Bertrand est arrivé par une autre voie. Je désignerai par (w') la variation de w qui dépend de la rotation des orbites; alors

$$\lambda' = r^0 \cos w - r_1^0 \cos w_1,$$

$$\sin\lambda (w') = r_1^0 \sin w_1 - r^0 \sin w \cos\lambda,$$

ou bien

$$\lambda' = mm_1 \sin\lambda \left(pq_1 \frac{R_1}{f} + p_1 q \frac{R}{f_1}\right),$$

$$(w') = -mm_1 qq_1 \left(\frac{R}{f_1} + \frac{R_1}{f}\cos\lambda\right).$$

On trouve ensuite que

$$w' = \frac{f}{mr^2} + (w'),$$

$$p' = \frac{\omega}{m} - q(w'),$$

$$q' = \frac{\varpi}{m} + p(w'),$$

$$\omega' = -\frac{pm\mathrm{M}}{r^3} + mm_1(p\mathrm{R} - p_1\mathrm{R}_1) - \varpi(w'),$$

$$\varpi' = -\frac{qm\mathrm{M}}{r^3} + mm_1(q\mathrm{R} - q_1\mathrm{R}_1\cos\lambda) + \omega(w').$$

On peut donc former un système de neuf équations différentielles du premier ordre, en réunissant par exemple les variables r, w, r', f, σ, ou bien p, q, ω, ϖ, λ. Un pareil système donnera toujours le mouvement relatif des trois corps, et nous en connaissons deux intégrales, celle des forces vives et une intégrale des aires. En posant

$$\mathrm{U} = \frac{m}{r} + \frac{m_1}{r_1} + \frac{mm_1}{\rho},$$

$$2\mathrm{MT} = \frac{1 - m_1}{m}(\omega^2 + \varpi^2) + \frac{1 + m}{m_1}(\omega_1^2 + \varpi_1^2) - 2(\omega\omega_1 + \varpi\varpi_1\cos\lambda),$$

la première intégrale sera $\mathrm{T} - \mathrm{U} = \mathrm{H}$, et la seconde se trouve comme il suit.

Considérons les quatre triangles que les rayons vecteurs peuvent former avec les vitesses v, v_1; désignons par $\frac{f}{2m}$ et $\frac{\varphi}{2m}$ les triangles que r, r_1 forment avec v, et par $\frac{\varphi_1}{2m_1}$, $\frac{f_1}{2m_1}$, ceux qu'ils forment avec v_1. Dès lors, le principe des aires fournit l'équation *géométrique*

$$(36) \qquad \overline{\text{MK}} = (1 + m_1)\overline{f} + (1 + m)\overline{f_1} - m_1\overline{\varphi} - m\overline{\varphi_1},$$

qui exprime une relation linéaire entre les projections des triangles f, φ et celle d'un triangle K pris dans le plan invariable. Si nous projetons sur un plan perpendiculaire à r, les termes f et φ_1 disparaissent, et comme $r\varphi \sin(r, \varphi) = r_1 f \sin(r_1, f)$, il vient

$$\text{MK}z = (1 + m) r f_1 \sin(r, f_1) - m_1 r_1 f \sin(r_1, f),$$

ou bien

$$(37) \qquad \frac{\text{MK}z}{\sin\lambda} = (1 + m) q f_1 - m_1 q_1 f;$$

De même, si nous projetons sur un plan perpendiculaire à r_1,

$$(38) \qquad \frac{\text{MK}z_1}{\sin\lambda} = m q f_1 - (1 + m_1) q_1 f,$$

d'où

$$f = p\varpi - q\omega = \text{K}\,\frac{m(z - z_1) - z_1}{q_1 \sin\lambda},$$

$$f_1 = p_1\varpi_1 - q_1\omega_1 = \text{K}\,\frac{m_1(z - z_1) + z}{q \sin\lambda}.$$

Si nous projetons enfin sur un plan perpendiculaire à l'intersection des orbites, ce sont les termes f, f_1 qui disparaissent tout d'abord; nous pouvons aussi faire abstraction des composantes ω, ω_1, et ne considérer que les triangles que r forme avec ϖ_1, et r_1 avec ϖ. On trouve ainsi

$$\text{MK} \sin \text{L} = m_1 r_1 \varpi \sin(r_1, f) - m r \varpi_1 \sin(r, f_1),$$

ou bien

$$(39) \qquad m_1 q_1 \varpi - m q \varpi_1 = \text{MK}\,\frac{\sin \text{L}}{\sin\lambda},$$

où L est la latitude de l'intersection. Les trois intégrales des aires fournissent donc z, z_1 et L, c'est-à-dire les latitudes des deux rayons vecteurs et de l'intersection des orbites. Elles déterminent ainsi la position du système par rapport au plan invariable, et elles donnent en outre une équation entre les neuf éléments du mouvement relatif, car on a

$$q_1(pq_1 - p_1 q\cos\lambda)\frac{z}{\sin\lambda} + q(p_1 q - pq_1\cos\lambda)\frac{z_1}{\sin\lambda} - r^2 r_1^2 \sin^2 s\,\frac{\sin L}{\sin\lambda}$$
$$= qq_1\sqrt{r^2 r_1^2\sin^2 s - r_1^2 z^2 - r^2 z_1^2 + 2zz_1 rr_1\cos s}.$$

Cette intégrale et celle des forces vives réduisent le nombre des équations différentielles à sept; on n'en aurait même que six en éliminant dt. Il est d'ailleurs à remarquer que les deux intégrales pourraient tenir lieu de deux équations différentielles du premier ordre pour les rayons vecteurs, auxquelles il suffirait d'ajouter cinq équations différentielles pour les variables ϖ, ϖ_1, f, f_1 et λ ou σ. En effet

$$m_1 q_1 \varpi - mq\varpi_1 = mm_1 qq_1 \frac{d\log\frac{q}{q_1}}{dt},$$

en prenant seulement la variation de q, q_1 pour les orbites immobiles; par conséquent, en vertu de la troisième intégrale des aires,

$$(40)\qquad qq_1\left(\frac{r'}{r} - \frac{r'_1}{r_1}\right) = \frac{\mathrm{MK}}{mm_1}\frac{\sin L}{\sin\lambda} + \frac{p_1 q f_1}{m_1 r_1^2} - \frac{pq_1 f}{mr^2}.$$

Cette équation permet de remplacer $\sin L$ par r' et r'_1 dans la combinaison des trois intégrales des aires et d'obtenir ainsi une équation différentielle pour les rayons vecteurs. Elle en serait une elle-même, si nous prenions pour variables les inclinaisons des orbites (i, i_1), les distances aux nœuds (u, u_1) et la différence des nœuds (Θ). Nous aurions, dans ce cas, $z = r\sin i\sin u$, et $\sin L = \frac{\sin i\sin i_1\sin\Theta}{\sin\lambda}$, les angles ϖ, λ et σ s'exprimeraient également par les angles u, i, Θ, et les quantités f, f_1 s'élimineraient par les deux premières intégrales des aires. La troisième intégrale des aires et celle des forces vives fourniraient donc deux équations différentielles du premier ordre pour r, r_1, auxquelles

il faudrait ajouter cinq autres pour les variables u, u_1, i, i_1 et Θ. On aurait

$$i' = r^0 \cos u, \quad \text{d'où} \quad f.i' = mm_1 \sin\lambda \cos u\, rq_1 R_1 ;$$

ensuite

$$u' = \frac{f}{mr^2} - \frac{\operatorname{tang} u}{\operatorname{tang} i}\, i', \quad \Theta' = \frac{\operatorname{tang} u_1}{\sin i_1}\, i'_1 - \frac{\operatorname{tang} u}{\sin i}\, i'$$

Les nœuds ϑ, ϑ_1 se trouveraient finalement par des quadratures à l'aide des relations

$$d\vartheta = \frac{\operatorname{tang} u}{\sin i}\, di, \quad d\vartheta_1 = \frac{\operatorname{tang} u_1}{\sin i_1}\, di_1.$$

Dans tous les cas, le problème revient à l'intégration de sept équations du premier ordre, que l'on peut réduire à six par l'élimination du temps. On n'aurait donc besoin que de cinq intégrations nouvelles, le principe du dernier multiplicateur fournissant la sixième.

On peut enfin réduire les neuf équations à six par une seule intégrale. Divisons les distances par un facteur de similitude n, et dt par $n\sqrt{n}$ (d'où il suit que les vitesses devront être multipliées par $\sqrt{n}$). Les dérivées des quantités $\frac{r}{n}$, $r'\sqrt{n}$, $\frac{f}{r}\sqrt{n}$, $\omega\sqrt{n}, \ldots$, et celles des angles w, λ, s, prises par rapport à $d\tau = \frac{dt}{n\sqrt{n}}$, ne renfermeront que ces mêmes variables, plus $n'\sqrt{n}$. Si nous substituons les nouvelles variables dans les deux intégrales du système, les constantes H, K y sont remplacées par nH et $\frac{K}{\sqrt{n}}$; on peut donc éliminer n, et obtenir une intégrale avec la constante HK^2. Le facteur n étant arbitraire, nous pouvons, par exemple, prendre $n = r$; la variable $\frac{r}{n}$ se trouve alors éliminée $\left(\text{puisque } \frac{r}{n} = 1,\ n'\sqrt{n} = r'\sqrt{n}\right)$, et nous n'avons plus que huit équations, qui se réduisent à six par l'élimination de $d\tau$ et par l'intégrale $F = HK^2$. La seconde intégrale, $F_1 = Hr$, fait connaître r en fonction des autres variables. On pourrait aussi prendre pour n le rapport $\frac{\rho}{\sin s} = \frac{r}{\sin S} = \frac{r}{\sin S_1}$, où S, S_1 sont les angles opposés aux rayons vecteurs dans le triangle

des trois corps. Dans ce cas, $\frac{r}{n}$ et $\frac{r_1}{n_1}$ représenteraient les deux angles S, S_1, et le troisième s serait donné par la relation $s + S + S_1 = 180°$. On aurait

$$\sin s\, n'\sqrt{n} = r'\sqrt{n}\cos S_1 + r'_1\sqrt{n}\cos S + \cos S\cos S_1 \frac{ds}{d\tau},$$

et les huit variables S, S_1, w, w_1, $r'\sqrt{n}$,... se détermineraient par sept équations simultanées, que l'intégrale $F = HK^2$ réduirait à six ; l'intégrale $F_1 = Hn$ fournirait la valeur absolue des distances. On voit qu'il doit exister sept intégrales qui ne renferment que les angles du système et les vitesses réduites par le facteur $\sqrt{n}$; la constante HK^2 de la seule qui soit connue correspond à l'excentricité dans le cas de deux corps. Ces résultats s'accordent avec la classification des intégrales donnée par M. Bertrand. En effet, les intégrales des deux formes $F =$ const. et $nF =$ const. sont fournies par deux équations différentielles partielles à huit variables, $\frac{dF}{d\tau} = 0$ et $\frac{d\log F}{d\tau} + n'\sqrt{n} = 0$. Il y a donc sept intégrales de chacune de ces formes, et comme six de l'une se déduisent de sept de l'autre, nous pouvons dire que la forme $nF =$ const. comprend sept intégrales, dont deux sont connues, et la forme $F =$ const. une seule nouvelle, encore inconnue. Deux intégrales des aires et les deux quadratures qui donnent le temps et les nœuds complètent le nombre des douze intégrales du problème.

Lorsqu'on fait usage de la transformation de Jacobi, on a $\Theta = 0$, $L = 0$, $u = w$, $\lambda = i - i_1$, et les intégrales des aires donnent

$$f = -K\frac{\sin i_1}{\sin\lambda}, \quad f_1 = K\frac{\sin i}{\sin\lambda}, \quad \cos\lambda = \frac{K^2 - f^2 - f_1^2}{2ff_1},$$

de sorte qu'on peut exprimer T et U par les variables r, r', u, f, ou bien par p, q, ω, ϖ.

On a, dans ce cas,

$$(41) \qquad 2T = \frac{\omega^2 + \varpi^2}{\mu} + \frac{\omega_1^2 + \varpi_1^2}{\mu_1} = \frac{\gamma^2 + \frac{f^2}{r^2}}{\mu} + \frac{\gamma_1^2 + \frac{f_1^2}{r_1^2}}{\mu_1},$$

μ et μ_1 étant des masses fictives, et $\gamma = \mu r'$.

U renferme à présent les variables f (ou bien ω, ϖ), et si l'on fait $T - U = H$, on a les deux systèmes

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dH}{dq}, \quad \frac{dq}{dt} = -\frac{dH}{dr}, \quad \frac{du}{dt} = \frac{dH}{df}, \quad \frac{df}{dt} = -\frac{dH}{du},$$

et

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dH}{d\omega}, \quad \frac{d\omega}{dt} = -\frac{dH}{dp}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{dH}{d\varpi}, \quad \frac{d\varpi}{dt} = -\frac{dH}{dq}.$$

Pour la théorie de la Lune, on pourrait employer une combinaison déjà indiquée par Jacobi, laquelle consiste à faire tourner les corps m, m_1 (Lune et Soleil) autour du centre de gravité de m et m_0 (Lune et Terre), en attribuant à la Lune la masse fictive $\mu = m(1 + m) = 0{,}012$, au Soleil la masse fictive $\mu_1 = \dfrac{m_1(1+m)}{1 + m + m_1} = 1{,}012$, celle de la Terre étant l'unité ($m_0 = 1$). On ferait, dans ce cas, $H = H_0 - R$, où

$$H_0 = \frac{1}{2\mu}\left(\gamma^2 + \frac{f^2}{r^2}\right) + \frac{1}{2\mu_1}\left(\gamma_1^2 + \frac{f_1^2}{r_1^2}\right) - \frac{1}{r}\frac{km}{1+m} - \frac{km_1(1+m)}{r_1},$$
$$R = km_1\left(\frac{1}{\sqrt{r_1^2 + m^2r^2 + 2mrr_1\sigma}} + \frac{m}{\sqrt{r_1^2 + r^2 - 2rr_1\sigma}} - \frac{1+m}{r_1}\right),$$

et l'on intégrerait par deux ellipses avec les constantes arbitraires α (valeur réciproque du grand axe), β (racine carrée du paramètre), π (argument de la latitude du périgée), τ (passage au périgée). Les grands axes étant $2a$, $2a_1$, les paramètres $2p$, $2p_1$, et k toujours la constante de l'attraction, on prendrait

$$\alpha = \frac{1}{2a}\frac{km}{1+m}, \quad \alpha_1 = \frac{km_1(1+m)}{2a_1}, \quad \beta = m\sqrt{pk}, \quad \beta_1 = \frac{m_1(1+m)}{\sqrt{1+m+m_1}}\sqrt{p_1 k}.$$

Dans la première approximation, on aurait $R = 0$, $f = \beta$, $f_1 = \beta_1$; la variation des constantes serait fournie par les équations

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{dR}{d\tau}, \quad \frac{d\tau}{dt} = -\frac{dR}{d\alpha}, \quad \frac{d\beta}{dt} = \frac{dR}{d\pi}, \quad \frac{d\pi}{dt} = -\frac{dR}{d\beta},$$

et le principe des forces vives donnerait l'intégrale $R + \alpha + \alpha_1 + H = 0$. Le développement de R ne diffère pas sensiblement de celui de la fonc-

tion perturbatrice ordinaire. En désignant par A_1, A_2,... les coefficients des puissances de $\frac{r}{r_1}$ dans cette dernière, nous avons

$$R = kmm_1 \frac{r^2}{r_1^3}\left[(1+m)A_1 + (1-m^2)A_2\frac{r}{r_1} + (1+m^3)A_3\frac{r^2}{r_1^2} + \ldots\right],$$

mais les arguments ne renferment plus les nœuds, car on a simplement

$$\sigma = \cos u \cos u_1 + \sin u \sin u_1 \cos\lambda.$$

VIII.

Pour terminer, je ferai voir que la réduction des équations différentielles du mouvement peut encore s'obtenir d'une manière plus directe. Soient $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$, les coordonnées, les vitesses et les accélérations d'un point rapporté à trois axes mobiles, et soient x^0, y^0, z^0 les rotations de ces axes; nous aurons

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} + yz^0 - zy^0, \quad \frac{dy}{dt} = \dot{y} + zx^0 - xz^0, \quad \frac{dz}{dt} = \dot{z} + xy^0 - yx^0,$$
$$\frac{d\dot{x}}{dt} = \ddot{x} + \dot{y}z^0 - \dot{z}y^0, \quad \frac{d\dot{y}}{dt} = \ddot{y} + \dot{z}x^0 - \dot{x}z^0, \quad \frac{d\dot{z}}{dt} = \ddot{z} + \dot{x}y^0 - \dot{y}x^0.$$

En supposant que les forces ne dépendent que des distances, si on élimine les rotations, ce système représente $6n$ équations différentielles entre les coordonnées et les vitesses de n points. Il n'en représente même que $6n - 6$, si nous prenons pour $x, \dot{x}, \ddot{x}$,... les coordonnées, les vitesses et les accélérations *relatives* des différents points. Pour éliminer les rotations, nous avons les trois équations $f'_1 = 0$, $f'_2 = 0$, $f'_3 = 0$, que l'on obtient en différentiant les équations des axes mobiles. Ces dernières nous permettent encore d'éliminer trois coordonnées, de sorte que le nombre des équations différentielles se réduit à $6n - 9$, ou bien à $6n - 10$, si nous chassons dt. Prenons, par exemple, l'origine des coordonnées au point m_0, faisons passer le plan des x, y par m_1, m_2, et l'axe des x par m_1; nous aurons

$$y_1 = z_1 = z_2 = 0,$$

et

$$\dot y_1 - x_1 z^0 = 0, \quad \dot z_1 + x_1 y^0 = 0, \quad \dot z_2 + x_2 y^0 - y_2 x^0 = 0,$$

de sorte que nous pourrons remplacer x^0, y^0, z^0 par des fonctions des variables x_1, x_2,.... Les équations différentielles se réduisent finalement à $6n - 12$ par les deux intégrales $H =$ const. et $K^2 =$ const., que fournissent les principes des forces vives et des aires. Le principe des aires donne encore deux intégrales qui déterminent la position des axes mobiles par rapport à l'axe polaire; le nœud du plan des x, y se trouve par une quadrature lorsqu'on connaît x^0, y^0.

On peut aussi se servir des intégrales des aires pour éliminer les rotations. Ces dernières s'expriment par deux angles et trois vitesses angulaires, ou, plus simplement, par un seul angle et deux dérivées ($x^0 = I'$, $y^0 = \Omega' \sin I$, $z^0 = \Omega' \cos I$), si nous prenons pour axe des x le nœud même du plan des x, y mobiles. Dans le problème des trois corps, si nous désignons par x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3; z_1, z_2, z_3 les différences des coordonnées, nous avons

$$\Sigma x = \Sigma y = \Sigma z = 0, \quad \Sigma \dot x = \Sigma \dot y = \Sigma \dot z = 0,$$

et en prenant

$$z_1 = z_2 = z_3 = 0,$$

les intégrales des aires sont

$$\Sigma \frac{1}{m} y\dot z = 0, \quad m^2 \Sigma \frac{1}{m} x\dot z = -K \sin I, \quad m^2 \Sigma \frac{1}{m}(x\dot y - y\dot x) = K \cos I.$$

En les combinant avec les relations

$$\dot z_1 + x_1 y^0 - x_1 y^0 = 0, \quad \dot z_2 + x_2 y^0 - y_2 x^0 = 0,$$

on a le moyen d'éliminer les quantités x^0, y^0, z^0, $\dot z_1$, $\dot z_2$ (*voir* p. 204). Si nous prenons le plan invariable pour plan des x, y, nous n'avons qu'une seule rotation $z^0 = \Omega'$, et si nous faisons passer le méridien de l'axe des x par le point m_1, en supposant $y_1 = 0$, la rotation peut s'éliminer par l'équation $x_1 z^0 = \dot y_1$. Il reste à éliminer $\dot y_1$ des dix équa-

tions qui déterminent les coordonnées relatives x_1, z_1, x_2, y_2, z_2 et les vitesses correspondantes; or on a pour cela les quatre intégrales

$$\Sigma\frac{y\dot{z}-z\dot{y}}{m}=0,\quad \Sigma\frac{z\dot{x}-x\dot{z}}{m}=0,$$

$$m^2\Sigma\frac{x\dot{y}-y\dot{x}}{m}=K,\quad m^2\Sigma\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{m}=U+H,$$

qui permettent, en outre, d'éliminer trois autres variables.

On arrive encore au même résultat par les considérations suivantes. Soit r la distance d'une planète m au Soleil m_0, soit f la vitesse aréolaire relative : les composantes de la vitesse, l'une parallèle, l'autre perpendiculaire à r, seront r' et $\frac{f}{r}$; dans la direction de la normale à l'orbite la vitesse est nulle. J'appellerai R, F, N les accélérations relatives suivant les mêmes trois axes mobiles; les rotations correspondantes sont r^0, zéro et $\frac{f}{r^2}$. En substituant ces quantités dans les formules données plus haut, on trouve

$$r''=R+\frac{f^2}{r^3},\quad f'=rF,\quad r^0 f=rN.$$

Les produits rF, rN sont les moments des forces perturbatrices, projetés sur l'orbite f et sur un plan perpendiculaire; ils sont, pour chacun des corps troublants, proportionnels aux projections du triangle Δ qu'il forme avec m, m_0; donc

$$f'=\Sigma m_1\left(\frac{1}{\rho^3}-\frac{1}{r_1^3}\right)\Delta\cos\eta,\quad r^0 f=\Sigma m_1\left(\frac{1}{\rho^3}-\frac{1}{r_1^3}\right)\Delta\sin\eta,$$

comme à la page 217. Il s'ensuit que les dérivées des distances r et des vitesses r', f, ainsi que les rotations r^0 des orbites, s'expriment par les éléments du mouvement relatif. Or, on a vu plus haut que les dérivées des angles ϖ, λ dépendent des rotations r^0; on peut donc former des systèmes qui ne déterminent que le mouvement relatif, et il est facile de voir que pour n corps il faut $6n-9$ équations. Elles se réduisent à $6n-10$, si nous chassons dt, et nous en connaissons deux

intégrales ($H = \text{const.}$, $K^2 = \text{const.}$). Il ne resterait qu'une seule intégrale, si, pour diminuer encore d'une unité le nombre des variables, nous avions recours à l'artifice déjà expliqué, lequel consiste à diviser toutes les distances par une fonction homogène p d'une seule dimension. En faisant $r = p\rho$, $x = p\xi,\ldots$, on a évidemment

$$p = f(r, x,\ldots) = pf(\rho, \xi,\ldots), \quad \text{d'où} \quad f(\rho, \xi,\ldots) = 1,$$

de sorte qu'il existe entre les nouvelles variables une relation qui en diminue le nombre d'une unité.

Les forces étant des fonctions homogènes de la dimension ε, il faut en même temps remplacer les vitesses $r', x',\ldots$ par $\rho' p^{\frac{1+\varepsilon}{2}}$, $\xi' p^{\frac{1+\varepsilon}{2}}$, et dt par $p^{\frac{1-\varepsilon}{2}} d\tau$. Les dérivées des variables ρ, ξ, ρ', $\xi',\ldots$, prises par rapport au temps fictif τ, ne renferment alors aucune inconnue nouvelle, de sorte que l'ordre du système se trouve abaissé d'une unité. Mais la constante H se multiplie par $p^{1+\varepsilon}$, et K^2 par $p^{3+\varepsilon}$; on n'obtient une intégrale que par la combinaison $H^{\frac{3+\varepsilon}{2}} K^{-1-\varepsilon}$ Dans le cas de la nature, on a $\varepsilon = -2$, les carrés des temps réel et fictif sont proportionnels aux cubes des unités de longueur

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = \left(\frac{p}{1}\right)^3.$$

Méthode de Cauchy pour l'inversion de l'intégrale elliptique;

PAR M. DIDON,

Docteur ès Sciences.

Dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* de l'année 1843 (t. XVII) se trouvent plusieurs Mémoires de Cauchy, relatifs à certains produits d'un nombre infini de facteurs, et, en particulier, à ceux qu'il a appelés *factorielles réciproques,* et qui ne sont autre chose que les fonctions Θ de Jacobi. Les premiers Mémoires sont consacrés au développement en séries infinies de ces factorielles et de leurs puissances, et on trouve dans les derniers une méthode extrêmement simple et ingénieuse pour l'inversion de l'intégrale elliptique. Cette méthode étant peu connue, j'ai pensé qu'il serait utile de l'exposer, en mettant à la place des notations de Cauchy celles de Jacobi, qui sont plus familières. On trouvera, dans ce qui va suivre, l'expression, au moyen des fonctions Θ, H,..., non-seulement de $\sin \mathrm{am} x$, $\cos \mathrm{am} x$ et $\Delta \mathrm{am} x$, mais aussi de la fonction elliptique $\Pi(x, a)$ de troisième espèce; et même une formule de Cauchy, conduisant à ce dernier résultat, donnera, si on l'interprète convenablement, la solution du problème de l'addition des arguments.

On a

$$\Theta(x) = \mathrm{A}\left(1 - 2q\cos\frac{\pi x}{\mathrm{K}} + q^2\right)\left(1 - 2q^3\cos\frac{\pi x}{\mathrm{K}} + q^6\right)\cdots,$$

$$\Theta_1(x) = \mathrm{A}\left(1 + 2q\cos\frac{\pi x}{\mathrm{K}} + q^2\right)\left(1 + 2q^3\cos\frac{\pi x}{\mathrm{K}} + q^6\right)\cdots,$$

$$\mathrm{H}(x) = \mathrm{A}\,2\sqrt[4]{q}\sin\frac{\pi x}{2\mathrm{K}}\left(1 - 2q^2\cos\frac{\pi x}{\mathrm{K}} + q^4\right)\left(1 - 2q^4\cos\frac{\pi x}{\mathrm{K}} + q^8\right)\cdots,$$

$$\mathrm{H}_1(x) = \mathrm{A}\,2\sqrt[4]{q}\cos\frac{\pi x}{2\mathrm{K}}\left(1 + 2q^2\cos\frac{\pi x}{\mathrm{K}} + q^4\right)\left(1 + 2q^4\cos\frac{\pi x}{\mathrm{K}} + q^8\right)\cdots,$$

où

$$q = e^{-\pi\frac{\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}} \quad \text{et} \quad \mathrm{A} = (1 - q^2)(1 - q^4)(1 - q^6)\cdots.$$

La formule fondamentale de la solution de Cauchy est la suivante :

$$(1)\qquad \frac{H(x)\Theta(x+a)}{H_1(x)\Theta_1(x+a)} = M\frac{\Theta_1(a)}{\Theta(a)}\left[-\frac{\Theta'_1(a)}{\Theta_1(a)} + D_x l\frac{\Theta_1(x+a)}{H_1(x)}\right],$$

dans laquelle

$$M = \frac{2K}{\pi}\,\frac{(1+q^2)^2(1+q^4)^2(1+q^6)^2\ldots}{(1-q^2)^2(1-q^4)^2(1-q^6)^2\ldots}.$$

Pour la démontrer, je considère la fonction de x :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{-1}}\,\frac{(1-q^2x)(1-q^4x)\ldots(1-x^{-1})(1-q^2x^{-1})\ldots}{(1+q^2x)(1+q^4x)\ldots(1+x^{-1})(1+q^2x^{-1})\ldots}$$
$$\times\frac{\left(1-qxe^{\frac{\pi a}{K}\sqrt{-1}}\right)\left(1-q^3xe^{\frac{\pi a}{K}\sqrt{-1}}\right)\ldots\left(1-qx^{-1}e^{-\frac{\pi a}{K}\sqrt{-1}}\right)\left(1-q^3x^{-1}e^{-\frac{\pi a}{K}\sqrt{-1}}\right)\ldots}{\left(1+qxe^{\frac{\pi a}{K}\sqrt{-1}}\right)\left(1+q^3xe^{\frac{\pi a}{K}\sqrt{-1}}\right)\ldots\left(1+qx^{-1}e^{-\frac{\pi a}{K}\sqrt{-1}}\right)\left(1+q^3x^{-1}e^{-\frac{\pi a}{K}\sqrt{-1}}\right)\ldots},$$

qui, pour $x = \infty$, se réduit à une constante. D'après une proposition bien connue du calcul des résidus, cette fonction se comportera comme une fraction rationnelle relativement à la décomposition en fractions simples, et, par conséquent, sera égale, à une constante près, à

$$\frac{M\pi}{K\sqrt{-1}}\,\frac{\Theta_1(a)}{\Theta(a)}\left[\frac{1}{1+x^{-1}} + \sum_{n=1}^{n=+\infty}\left(\frac{1}{1+q^{-n}x^{-1}} - \frac{1}{1+q^{-n}x}\right)\right.$$
$$\left. + \sum_{n=1}^{n=+\infty}\left(\frac{1}{1+q^{2n-1}xe^{\frac{\pi a}{K}\sqrt{-1}}} - \frac{1}{1+q^{2n-1}x^{-1}e^{-\frac{\pi a}{K}\sqrt{-1}}}\right)\right].$$

Cette expression, quand y suppose $x = e^{\frac{\pi x}{K}\sqrt{-1}}$, devient

$$M\frac{\Theta_1(a)}{\Theta(a)}\left[\frac{\frac{\pi}{2K}\sin\frac{\pi x}{2K}}{\cos\frac{\pi x}{2K}} - \frac{\pi}{2K\sqrt{-1}}\right.$$
$$\left. - \sum_{n=1}^{n=+\infty}\frac{-\frac{2\pi}{K}q^{2n}\sin\frac{\pi x}{K}}{1+2q^{2n}\cos\frac{\pi x}{K}+q^{4n}} + \sum_{n=1}^{n=+\infty}\frac{-\frac{2\pi}{K}q^{2n-1}\sin\frac{\pi(x+a)}{K}}{1+2q^{2n-1}\cos\frac{\pi(x+a)}{K}+q^{4n-2}}\right],$$

ou bien

$$\mathrm{M}\frac{\Theta_1(a)}{\Theta(a)}\left[\mathrm{D}_x \mathrm{l}\frac{\Theta_1(x+a)}{\mathrm{H}_1(x)}-\frac{\pi}{2\mathrm{K}\sqrt{-1}}\right].$$

Si l'on remarque que, dans la même hypothèse, $f(x)$ se transforme en $\frac{\mathrm{H}(x)\Theta(x+a)}{\mathrm{H}_1(x)\Theta_1(x+a)}$, on en conclura

$$\frac{\mathrm{H}(x)\Theta(x+a)}{\mathrm{H}_1(x)\Theta_1(x+a)}=\mathrm{M}\frac{\Theta_1(a)}{\Theta(a)}\left[\mathrm{S}+\mathrm{D}_x \mathrm{l}\frac{\Theta_1(x+a)}{\mathrm{H}_1(x)}\right],$$

S étant une quantité indépendante de x, qui sera, par conséquent, égale à $-\frac{\Theta'_1(a)}{\Theta_1(a)}$, puisque, pour $x=0$, le premier membre de la relation précédente s'annule, ainsi que $\mathrm{D}_x \mathrm{l}\,\mathrm{H}_1(x)$. La formule (1) est donc démontrée. En y changeant q en $-q$, elle devient

$$(2)\qquad \frac{\mathrm{H}(x)\Theta_1(x+a)}{\mathrm{H}_1(x)\Theta(x+a)}=\mathrm{M}\frac{\Theta(a)}{\Theta_1(a)}\left[-\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}+\mathrm{D}_x \mathrm{l}\frac{\Theta(x+a)}{\mathrm{H}_1(x)}\right].$$

Pour simplifier l'écriture, je poserai

$$\frac{\mathrm{H}(x)}{\mathrm{H}_1(x)}=\omega,\quad \frac{\Theta(x+a)}{\mathrm{H}_1(x)}=\mathrm{U},\quad \frac{\Theta_1(x+a)}{\mathrm{H}_1(x)}=\mathrm{V},$$
$$\frac{\Theta(a)}{\Theta_1(a)}=\mathrm{H},\quad -\frac{\Theta'_1(a)}{\Theta_1(a)}=\alpha,\quad -\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}=\beta,$$

ce qui permettra d'écrire les formules (1) et (2) de la manière suivante :

$$(1')\qquad \alpha+\mathrm{D}_x \mathrm{l}\,\mathrm{V}=\frac{1}{\mathrm{M}}\mathrm{H}\,\omega\,\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{V}};$$

$$(2')\qquad \beta+\mathrm{D}_x \mathrm{l}\,\mathrm{U}=\frac{1}{\mathrm{M}}\mathrm{H}^{-1}\omega\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{U}},$$

Si, dans ces égalités, on change x en $x+\mathrm{K}$, elles deviennent

$$(3)\qquad \alpha+\mathrm{D}_x \mathrm{l}\,\mathrm{U}-\mathrm{D}_x \mathrm{l}\,\omega=-\frac{1}{\mathrm{M}}\mathrm{H}\,\omega^{-1}\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{U}},$$

$$(4)\qquad \beta+\mathrm{D}_x \mathrm{l}\,\mathrm{V}-\mathrm{D}_x \mathrm{l}\,\omega=-\frac{1}{\mathrm{M}}\mathrm{H}^{-1}\omega^{-1}\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{V}}.$$

En retranchant des formules (1′) et (2′) respectivement les formules (4) et (3), on obtient

$$(5)\qquad \alpha - \beta + \mathrm{D}_x \mathrm{l}\omega = \frac{1}{\mathrm{M}}\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{V}}(\mathrm{H}\omega + \mathrm{H}^{-1}\omega^{-1}),$$

$$(6)\qquad \beta - \alpha + \mathrm{D}_x \mathrm{l}\omega = \frac{1}{\mathrm{M}}\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{U}}(\mathrm{H}^{-1}\omega + \mathrm{H}\omega^{-1}),$$

d'où l'on déduit, par la multiplication,

$$(\mathrm{D}_x \mathrm{l}\omega)^2 = \frac{1}{\mathrm{M}^2}[\omega^2 + \omega^{-2} + \mathrm{H}^2 + \mathrm{H}^{-2} + \mathrm{M}^2(\alpha - \beta)^2)].$$

La constante $\mathrm{H}^2 + \mathrm{H}^{-2} + \mathrm{M}^2(\alpha - \beta)^2$, devant être indépendante de a, puisque ni ω ni M n'en dépendent, sera égale à $\left[\frac{\Theta(0)}{\Theta_1(0)}\right]^2 + \left[\frac{\Theta_1(0)}{\Theta(0)}\right]^2$; car α et β s'annulent avec a. Si donc on pose

$$(7)\qquad k'^{\frac{1}{2}} = \frac{(1-q)^2(1-q^3)^2(1-q^5)^2\ldots}{(1+q)^2(1+q^3)^2(1+q^5)^2\ldots} = \frac{\Theta(0)}{\Theta_1(0)},$$

cette constante pourra s'exprimer par $k' + k'^{-1}$, et l'on aura

$$(8)\qquad \frac{d\omega^2}{dx^2} = \frac{1}{\mathrm{M}^2}(1 + k'\omega^2)(1 + k'^{-1}\omega^2).$$

Examinons la valeur de ω :

$$\omega = \operatorname{tang}\frac{\pi x}{2\mathrm{K}}\,\frac{\left(1 - 2q^2\cos\frac{\pi x}{\mathrm{K}} + q^4\right)\left(1 - 2q^4\cos\frac{\pi x}{\mathrm{K}} + q^8\right)\ldots}{\left(1 + 2q^2\cos\frac{\pi x}{\mathrm{K}} + q^4\right)\left(1 + 2q^4\cos\frac{\pi x}{\mathrm{K}} + q^8\right)\ldots}.$$

Nous voyons que, nulle avec x, elle augmente en même temps que cette variable, et est infinie pour $x = \mathrm{K}$; si donc on pose

$$(9)\qquad \omega = \sqrt{k'}\operatorname{tang} p,$$

p croîtra de 0 à $\frac{\pi}{2}$ quand x croîtra de 0 à K, et la dérivée $\frac{dp}{dx}$ sera positive dans cet intervalle.

Dans la formule (8), remplaçons ω et $d\omega$ en fonction de p et de dp, nous obtiendrons, en posant $k^2 = 1 - k'^2$,

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{M\sqrt{k'}}\sqrt{1 - k^2 \sin^2 p},$$

avec le signe $+$ devant le radical. Maintenant nous allons particulariser les constantes positives k et k', qui jusqu'à présent étaient arbitraires, en les assujettissant à satisfaire à l'égalité $M\sqrt{k'} = 1$, c'est-à-dire

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = (1 - q^2)(1 - q^4)(1 - q^6)\ldots[(1 + q)(1 + q^3)(1 + q^5)\ldots]^2$$

Il vient alors, puisque p s'annule avec x,

$$(10) \qquad x = \int_0^p \frac{dp}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 p}};$$

p est ce que Legendre appelle l'*amplitude de l'intégrale* x; la formule (9) peut donc s'écrire

$$(11) \qquad \operatorname{tang} p = \operatorname{tang} \operatorname{am} x = \frac{1}{\sqrt{k'}} \frac{H(x)}{H_1(x)}.$$

Il est bon de remarquer que, p devenant égal à $\frac{\pi}{2}$, pour $x = K$, on a

$$(12) \qquad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dp}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 p}}.$$

Mais il nous faut exprimer $\sin p$, $\cos p$, et $\sqrt{1 - k^2 \sin^2 p}$ au moyen de x. Pour y arriver, on se servira des formules (5), (6), (1′) et (2′) dans lesquelles on fera $a = 0$. Appelant u et v ce que deviennent U et V dans cette hypothèse, et remarquant que pour $a = 0$, $\alpha = \beta = 0$, et $H = k'^{\frac{1}{2}}$, on tirera de (5) et de (6)

$$\frac{1}{M}\frac{u}{v} = \frac{D_x l\omega}{k'^{\frac{1}{2}}\omega + k'^{-\frac{1}{2}}\omega^{-1}}, \qquad \frac{1}{M}\frac{v}{u} = \frac{D_x l\omega}{k'^{-\frac{1}{2}}\omega - k'^{-\frac{1}{2}}\omega^{-1}},$$

et ensuite de (1′) et de (2′)

$$\mathrm{D}_x \mathrm{l}\, v = \frac{k'^{\frac{1}{2}}\omega\, \mathrm{D}_x \mathrm{l}\,\omega}{k'^{\frac{1}{2}}\omega + k'^{-\frac{1}{2}}\omega^{-1}}, \quad \mathrm{D}_x \mathrm{l}\, u = \frac{k'^{-\frac{1}{2}}\omega\, \mathrm{D}_x \mathrm{l}\,\omega}{k'^{-\frac{1}{2}}\omega + k'^{\frac{1}{2}}\omega^{-1}}.$$

En intégrant, il viendra

$$\sqrt{1 + k'\omega^2} = \frac{v}{v_0}, \quad \sqrt{1 + k'^{-1}\omega^2} = \frac{u}{u_0},$$

v_0 et u_0 étant ce que deviennent v et u pour $x = 0$; ou bien

$$\frac{\sqrt{1 - k^2\sin^2 p}}{\cos p} = \frac{\mathrm{H}_1(0)}{\Theta_1(0)}\,\frac{\Theta_1(x)}{\mathrm{H}_1(x)}, \quad \frac{1}{\cos p} = \frac{\mathrm{H}_1(0)}{\Theta(0)}\,\frac{\Theta(x)}{\mathrm{H}_1(x)};$$

ou encore, si nous tenons compte de la relation (11)

$$(13) \quad \begin{cases} \cos p = \dfrac{\Theta(0)}{\mathrm{H}_1(0)}\,\dfrac{\mathrm{H}_1(x)}{\Theta(x)}, \\ \sqrt{1 - k^2\sin^2 p} = \dfrac{\Theta(0)}{\Theta_1(0)}\,\dfrac{\Theta_1(x)}{\Theta(x)}, \\ \sin p = \cos p \tang p = \dfrac{1}{\sqrt{k'}}\,\dfrac{\Theta(0)}{\mathrm{H}_1(0)}\,\dfrac{\Theta(x)}{\mathrm{H}(x)}. \end{cases}$$

Il n'est pas difficile d'exprimer les coefficients qui entrent dans les seconds membres de ces formules, au moyen des quantités k et k'. D'abord, on a $\dfrac{\Theta(0)}{\Theta_1(0)} = \sqrt{k'}$; soit maintenant $\dfrac{\Theta(0)}{\mathrm{H}_1(0)} = \lambda$. En éliminant p entre les équations (13), on arrive aux relations

$$(14) \quad \begin{cases} \Theta^2(x) = \lambda^2\mathrm{H}_1^2(x) + \dfrac{\lambda^2}{k'}\mathrm{H}^2(x), \\ k'^2\Theta^2(x) = k^2\lambda^2\mathrm{H}^2(x) + k'^2\Theta_1^2(x). \end{cases}$$

Si on change, dans la première de ces formules, x en $x + i\mathrm{K}'$, et qu'on emploie les égalités suivantes bien faciles à vérifier

$$(15) \quad \begin{cases} \Theta(x + i\mathrm{K}') = i\mathrm{H}(x)\,e^{-\frac{i\pi}{4\mathrm{K}}(2x + i\mathrm{K}')}, \\ \mathrm{H}(x + i\mathrm{K}') = i\Theta(x)\,e^{-\frac{i\pi}{4\mathrm{K}}(2x + i\mathrm{K}')}, \\ \mathrm{H}_1(x + i\mathrm{K}') = \Theta_1(x)\,e^{-\frac{i\pi}{4\mathrm{K}}(2x + i\mathrm{K}')}, \end{cases}$$

elle deviendra

$$-H^2(x) = \lambda^2\Theta_1^2(x) - \frac{\lambda^2}{k'}\Theta^2(x),$$

et, en la comparant, dans cette nouvelle forme, à la seconde des formules (14), on obtiendra $\lambda = \sqrt{\frac{k'}{k}}\cdot$ Donc finalement

$$(16)\quad \begin{cases} \sin\operatorname{am} x = \dfrac{1}{\sqrt{k}}\dfrac{H(x)}{\Theta(x)}, \\ \cos\operatorname{am} x = \sqrt{\dfrac{k'}{k}}\dfrac{H_1(x)}{\Theta_1(x)}, \\ \sqrt{1 - k^2\sin^2\operatorname{am} x} = \Delta\operatorname{am} x = \sqrt{k'}\dfrac{\Theta_1(x)}{\Theta(x)}. \end{cases}$$

On peut remarquer qu'on déduit des formules précédentes

$$\sqrt{k} = \frac{H_1(0)}{\Theta_1(0)} = \frac{2\sqrt[4]{q}(1+q^2)^2(1+q^4)^2(1+q^6)^2\ldots}{(1+q)^2(1+q^3)^2(1+q^5)^2\ldots}.$$

Il reste à indiquer comment, connaissant k, on déduit K et K'. K est donné par l'égalité (12), et Cauchy arrive, de la manière suivante, à la formule

$$(17)\qquad K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dp}{\sqrt{1 - k'^2\sin^2 p}}.$$

Si, dans l'expression de $\omega = \frac{H(x)}{H_1(x)}$, on remplace les sinus et cosinus par des exponentielles imaginaires, on trouvera, en posant $e^{\frac{\pi x}{K}\sqrt{-1}} = y$,

$$\omega = \sqrt{-1}\,\frac{(1-y)(1-q^2y)(1-q^4y)\ldots(1-q^2y^{-1})(1-q^4y^{-1})\ldots}{(1+y)(1+q^2y)(1+q^4y)\ldots(1+q^2y^{-1})(1+q^4y^{-1})\ldots}.$$

On voit donc que $\frac{\omega}{\sqrt{-1}}$ s'annule pour $y = q^2$ et $y = 1$, mais ne s'annule pas dans l'intervalle, et que cette quantité, pour $y = q$, est égale à $\sqrt{k'}$. L'équation (8), où l'on remplace dx en fonction de y et

de dy, se transforme en

$$(18)\qquad -\frac{y^2\pi^2 d\omega^2}{K^2 dy^2} = \frac{1}{M^2}(1 + k'\omega^2)(1 + k'^{-1}\omega^2),$$

et l'on reconnaît que la dérivée $\frac{d\omega}{\sqrt{-1}\,dy}$ est nulle avec l'expression $1 + k'^{-1}\omega^2$ pour $\frac{\omega}{\sqrt{-1}} = k'^{\frac{1}{2}}$, c'est-à-dire que $\frac{\omega}{\sqrt{-1}}$ passe par un maximum pour $y = q$. On peut, par conséquent, poser $\omega = \sqrt{-1}\,k'^{\frac{1}{2}}\sin\varphi$, et lorsque y variera de q à 1, φ diminuera de $\frac{\pi}{2}$ à 0, de sorte que la dérivée $\frac{d\varphi}{dy}$ sera négative dans cet intervalle. Remplaçons, dans l'équation (18), ω et $d\omega$ en fonction de φ et de $d\varphi$, il viendra, dans l'intervalle de $y = q$ à $y = 1$,

$$\frac{dy}{y} = \frac{M\pi\sqrt{k'}}{K}\,\frac{-\,d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2\sin^2\varphi}},$$

et, par conséquent, puisque $M\sqrt{k'} = 1$, et que, pour $\varphi = 0$, on a $y = 1$

$$\mathrm{l}y = -\frac{\pi}{K}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2\sin^2\varphi}}.$$

Pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$, y devient égal à q; donc

$$\mathrm{l}q = -\frac{\pi}{K}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2\sin^2\varphi}},$$

ce qui démontre la formule (17).

Je passe maintenant à l'expression de la fonction elliptique de troisième espèce $\Pi(x, a)$ au moyen de la fonction Θ. La formule (6) donne

$$(19)\qquad \frac{1}{M}\,\frac{V}{U} = \frac{\beta - \alpha + D_x \mathrm{l}\omega}{H^{-1}\omega + H\omega^{-1}},$$

ce qui permet d'écrire l'égalité (2′) ainsi qu'il suit :

$$D_x \mathrm{l}U = -\beta + \frac{H^{-1}\omega\, D_x \mathrm{l}\omega}{H^{-1}\omega + H\omega^{-1}} - (\beta - \alpha)\,\frac{H^{-1}\omega}{H^{-1}\omega + H\omega^{-1}},$$

d'où, en intégrant,

$$l\frac{U}{U_0} = -\beta x + l\sqrt{1 + H^{-2}\omega^2} + (\beta - \alpha)\int_0^x \frac{H^{-2}\omega^2}{1 + H^{-2}\omega^2}\,dx,$$

U_0 étant la valeur de U qui correspond à $x = 0$. Si l'on remplace U, β et H par leurs valeurs, on aura

$$l\frac{H_1(0)}{\Theta(a)}\frac{\Theta(x+a)}{H_1(x)} = x\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + l\sqrt{1 + \frac{\Theta_1^2(a)}{\Theta^2(a)}\omega^2} + \left[\frac{\Theta'_1(a)}{\Theta_1(a)} - \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}\right]\int_0^x \frac{\frac{\Theta_1^2(a)}{\Theta^2(a)}\omega^2}{1 + \frac{\Theta_1^2(a)}{\Theta^2(a)}\omega^2}\,dx.$$

En changeant, dans cette formule, a en $-a$, elle deviendra

$$l\frac{H_1(0)}{\Theta(a)}\frac{\Theta(x-a)}{H_1(x)} = -x\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + l\sqrt{1 + \frac{\Theta_1^2(a)}{\Theta^2(a)}\omega^2} - \left[\frac{\Theta'_1(a)}{\Theta_1(a)} - \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}\right]\int_0^x \frac{\frac{\Theta_1^2(a)}{\Theta^2(a)}\omega^2}{1 + \frac{\Theta_1^2(a)}{\Theta^2(a)}\omega^2}\,dx.$$

Si l'on retranche ces deux égalités membre à membre, on obtiendra

$$(20)\qquad \left[\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} - \frac{\Theta'_1(a)}{\Theta_1(a)}\right]\int_0^x \frac{\frac{\Theta_1^2(a)}{\Theta^2(a)}\omega^2}{1 + \frac{\Theta_1^2(a)}{\Theta^2(a)}\omega^2}\,dx = x\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \frac{1}{2}l\frac{\Theta(x-a)}{\Theta(x+a)}.$$

Mais les formules (16) donnent

$$\frac{\Theta_1^2(a)}{\Theta(a)} = \frac{1}{k'}\Delta^2 \operatorname{am} a = \frac{1}{k'}(1 - k^2\sin^2\operatorname{am} a),$$

$$\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} - \frac{\Theta'_1(x)}{\Theta_1(x)} = -D_x l\frac{\Theta_1(x)}{\Theta(x)} = \frac{k^2\sin p\cos p}{1 - k^2\sin^2 p}\frac{dp}{dx} = \frac{k^2\sin\operatorname{am} x\cos\operatorname{am} x}{\Delta\operatorname{am} x},$$

et l'on a

$$\omega^2 = k'\frac{\sin^2\operatorname{am} x}{\cos^2\operatorname{am} x}.$$

Le premier membre de la formule (20) est donc égal à

$$\int_0^x \frac{k^2 \sin \operatorname{am} a \cos \operatorname{am} a \,\Delta \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} x}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} x}\, dx,$$

c'est-à-dire à $\Pi(x, a)$.

La formule (19) résout le problème de l'addition des arguments relativement à la fonction $\Delta \operatorname{am} x$; car, si l'on remarque que $\frac{1}{M} = \sqrt{k'}$ cette formule revient à

$$\Delta \operatorname{am}(x + a) = \frac{\dfrac{k^2 \sin \operatorname{am} a \cos \operatorname{am} a}{\Delta \operatorname{am} a} + \dfrac{\Delta \operatorname{am} x}{\sin \operatorname{am} x \cos \operatorname{am} x}}{\Delta \operatorname{am} a \dfrac{\sin \operatorname{am} x}{\cos \operatorname{am} x} + \dfrac{1}{\Delta \operatorname{am} a} \dfrac{\cos \operatorname{am} x}{\sin \operatorname{am} x}}.$$

Si l'on multiplie les deux termes du second membre de l'égalité précédente par $\Delta \operatorname{am} a \sin \operatorname{am} x \cos \operatorname{am} x$, et si l'on remarque que le nouveau dénominateur $\Delta^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} x + \cos^2 \operatorname{am} x$ est égal à $1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \cos^2 \operatorname{am} x$, on aura finalement

$$(21) \qquad \Delta \operatorname{am}(x + a) = \frac{\Delta \operatorname{am} a \,\Delta \operatorname{am} x - k^2 \sin \operatorname{am} a \cos \operatorname{am} a \sin \operatorname{am} x \cos \operatorname{am} x}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} x}.$$

Je terminerai en indiquant encore une formule importante, démontrée très-simplement par Cauchy, et qui peut servir aussi à exprimer $\Pi(x, a)$ au moyen de la fonction Θ. Qu'on cherche à décomposer en fractions simples la fonction $\frac{H(x + a) H(x - a)}{\Theta^2(x)}$, on trouvera sans difficulté que la somme des deux fractions correspondantes au facteur $1 - 2q^{2n-1} \cos \frac{\pi x}{K} + q^{4n-2}$ de $\Theta(x)$ est

$$\frac{\Theta^2(a)}{\sqrt{q}(1 - q^2)^4(1 - q^4)^4(1 - q^6)^4 \ldots} \times \left[\frac{(1 - q^{4n-2})^2}{\left(1 - 2q^{2n-1} \cos \frac{\pi x}{K} + q^{4n-2}\right)^2} - \frac{1 + q^{4n-2}}{1 - 2q^{2n-1} \cos \frac{\pi x}{K} + q^{4n-2}} \right].$$

Si l'on remarque la composition de cette expression, on voit qu'on

pourra écrire

$$\frac{H(x+a)H(x-a)}{\Theta^2(x)\Theta^2(a)} = \Phi(x) + S,$$

$\Phi(x)$ étant indépendant de a, et S de x. D'ailleurs, le premier membre de cette formule s'annulant pour $x = a$, on aura $S = -\Phi(a)$. Donc

$$(22) \qquad \frac{H(x+a)H(x-a)}{\Theta^2(x)\Theta^2(a)} = \Phi(x) - \Phi(a).$$

Il est facile de déterminer la fonction Φ. Si, en effet, nous remplaçons a par $2K$ dans la formule précédente, elle donne

$$\Phi(x) = \Phi(2K) + \frac{k}{\Theta^2(0)} \sin^2 \operatorname{am} x,$$

et, par conséquent,

$$\Phi(x) - \Phi(a) = \frac{k}{\Theta^2(0)}(\sin^2 \operatorname{am} x - \sin^2 \operatorname{am} a).$$

La formule (22) devient donc

$$(23) \qquad \sin^2 \operatorname{am} x - \sin^2 \operatorname{am} a = \frac{\Theta^2(0) H(x+a) H(x-a)}{k\Theta^2(a)\Theta^2(x)}.$$

Cette relation importante prend, si l'on y change a en $a + iK'$, et qu'on emploie les formules (15), cette nouvelle forme :

$$1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} x = \frac{\Theta^2(0)\Theta(x+a)\Theta(x-a)}{\Theta^2(a)\Theta^2(x)}.$$

Prenant les logarithmes des deux membres, différentiant par rapport à a, et intégrant ensuite par rapport à x, on trouvera finalement

$$\int_0^x \frac{k^2 \sin \operatorname{am} a \cos \operatorname{am} a \,\Delta \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} x}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} x} dx = \Pi(x, a) = x\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \frac{1}{2} \operatorname{l} \frac{\Theta(x-a)}{\Theta(x+a)}.$$

Sur le mouvement vibratoire des plaques;

PAR M. ÉMILE MATHIEU.

1. Poisson est le premier qui ait donné la démonstration rigoureuse de l'équation aux différences partielles qui régit le mouvement vibratoire d'une lame ou d'une plaque. Si l'on suppose que cette plaque soit partout d'égale épaisseur, plane, homogène et de même élasticité dans tous les sens, cette équation est

$$(1) \qquad \frac{d^2 w}{dt^2} + a^2\left(\frac{d^4 w}{dx^4} + 2\frac{d^4 w}{dx^2 dy^2} + \frac{d^4 w}{dy^4}\right) = 0,$$

w désignant le déplacement transversal d'un point (x, y) de la surface médiane, t le temps, et les axes de coordonnées étant pris rectangulaires et dans le plan de cette surface. De plus a^2 a pour valeur

$$a^2 = \frac{k^2 h^2}{\rho},$$

h étant l'épaisseur de la plaque, ρ sa densité et k^2 une quantité positive qui dépend de deux coefficients qui entrent dans la théorie de l'élasticité des corps isotropes. (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. VIII.)

Cauchy, qui s'est occupé de la même question, a présenté les calculs avec plus d'ordre et de clarté; mais le fond de sa démonstration ne diffère pas de celle de Poisson. (*Exercices de Mathématiques*; 1828.)

Il était aisé de prévoir l'équation (1) avant d'en obtenir une démonstration rigoureuse. Il suffisait en effet pour l'obtenir de faire une hypothèse analogue à celle qui avait réussi à Jacques Bernoulli pour la détermination de l'équation de la lame vibrante. On pouvait encore

observer que cette dernière équation étant

$$(2)\qquad \frac{d^2 w}{dt^2} + a^2 \frac{d^4 w}{dx^4} = 0,$$

l'équation de la plaque vibrante sera nécessairement l'équation (1), si l'on admet qu'elle est linéaire; on le reconnaît facilement en remarquant que si w ne varie pas avec y, l'équation du mouvement de la plaque doit se réduire à (2) et qu'elle doit rester invariable par une transformation de coordonnées faite dans le plan des x, y. Mais il était impossible d'arriver à la véritable démonstration avant l'invention de la théorie de l'élasticité, qui est due à Navier.

Fourier a donné dans sa *Théorie mathématique de la Chaleur* l'intégrale générale de l'équation (1) au moyen d'une somme de deux intégrales définies. Toutefois cette formule est peu utile; car, pour se représenter le mouvement vibratoire de ces plaques, il faut intégrer l'équation (1) en ayant égard aux conditions auxquelles w doit satisfaire sur les bords.

Cauchy et Poisson ont donné dans leurs Mémoires ces conditions aux limites dans deux cas : celui où les bords sont fixes et encastrés, et celui où les bords sont libres.

Quand les bords sont encastrés, il en résulte deux conditions aux limites, et il n'y a aucun empêchement à les adopter; mais quand les bords sont libres, ces géomètres expriment, comme il semble naturel, que la pression sur les bords est nulle, et ils obtiennent trois équations par la considération des trois composantes de la pression; or, comme le remarque fort bien M. Kirchhof, il n'est pas possible de satisfaire à autant de conditions. Pour obvier à cet embarras, il reprend la question en partant de deux hypothèses, et ne trouve plus que deux conditions aux limites. Mais ces hypothèses fussent-elles exactes, des démonstrations qui les ont pour bases ne sauraient être regardées comme rigoureuses, et la seconde me semble tout à fait inadmissible (*Journal de Crelle*, t. XL). Il n'y a donc rien à changer à ce qui a été donné par Poisson et Cauchy pour établir l'équation (1), et nous reviendrons plus loin sur les conditions analytiques qui doivent être satisfaites sur les bords.

2. Quand on considère une corde ou une membrane dont les extrémités ou les bords sont fixes, le mouvement le plus général qu'elles peuvent avoir est la somme d'une infinité de solutions simples de la forme

$$w = u(\text{A}\sin mt + \text{B}\cos mt),$$

dans laquelle u est indépendant de t, et m une constante. La même propriété a lieu à l'égard du mouvement d'une lame dont les bords sont encastrés ou libres, d'après les conditions qu'on adopte aux extrémités. Il y a donc lieu de se demander quelles conditions aux limites il faut avoir pour que cette propriété appartienne encore au mouvement vibratoire d'une plaque.

Prenons deux solutions de l'équation (1) de la forme

$$(3)\qquad \begin{cases} w = u(\text{A}\sin l^2 at + \text{B}\cos l^2 at), \\ w' = u'(\text{A}'\sin l'^2 at + \text{B}'\cos l'^2 at), \end{cases}$$

et nous aurons les deux équations

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^4 u}{dx^4} + 2\dfrac{d^4 u}{dx^2 dy^2} + \dfrac{d^4 u}{dy^4} = l^4 u, \\ \dfrac{d^4 u'}{dx^4} + 2\dfrac{d^4 u'}{dx^2 dy^2} + \dfrac{d^4 u'}{dy^4} = l'^4 u. \end{cases}$$

L'intégration par parties donne

$$\int_{x_1}^{x_2} u'\frac{d^4 u}{dx^4}dx = \left(u'\frac{d^3 u}{dx^3} - \frac{d^2 u}{dx^2}\frac{du'}{dx} + \frac{du}{dx}\frac{d^2 u'}{dx^2} - u\frac{d^3 u'}{dx^3}\right)_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2}\frac{d^4 u'}{dx^4}dx,$$

en désignant par x_1 et x_2 les abscisses des deux points M_1 et M_2 où une droite parallèle à l'axe des x rencontre le contour de la plaque.

Intégrons l'équation précédente par rapport à y et étendons la double intégration à toute la surface de la plaque, nous aurons

$$\int\int u'\frac{d^4 u}{dx^4}dx\,dy$$
$$= \int\left(u'\frac{d^3 u}{dx^3} - \frac{du'}{dx}\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{du}{dx}\frac{d^2 u'}{dx^2} - u\frac{d^3 u'}{dx^3}\right)_{x_1}^{x_2}dy + \int\int u\frac{d^4 u'}{dx^4}dx\,dy.$$

Dans l'intégrale simple, dy est la projection sur l'axe des y de deux

éléments différents de la courbe du contour ds_1 et ds_2 situés en M_1 et M_2, et en désignant par α_1 et α_2 les angles avec l'axe des x des normales en M_1 et M_2, on a

$$dy = -ds_2\cos\alpha_2,\quad dy = ds_1\cos\alpha_1;$$

donc, en désignant par α l'angle de la normale en un point quelconque avec l'axe des x, on a

$$(\mathrm{A})\quad \left\{\begin{aligned}&\int\!\!\int u'\frac{d^4u}{dx^4}dx\,dy\\ &\quad= -\int\left(u'\frac{d^3u}{dx^3} - \frac{du'}{dx}\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u'}{dx^2}\frac{du}{dx} - \frac{d^3u'}{dx^3}u\right)\cos\alpha\, ds\\ &\qquad+\int\!\!\int u\frac{d^4u'}{dx^4}dx\,dy,\end{aligned}\right.$$

dans laquelle équation l'intégrale simple est prise tout le long du contour.

On trouve encore par l'intégration par parties

$$\int\!\!\int u'\frac{d^4u}{dx^2dy^2}dx\,dy = \int\left(\frac{d^3u}{dx\,dy^2}u' - \frac{du'}{dx}\frac{d^2u}{dy^2}\right)_{x_1}^{x_2}dy$$
$$+\int\left(\frac{d^2u'}{dx^2}\frac{du}{dy} - u\frac{d^3u'}{dx^2dy}\right)_{y_1}^{y_2}dx + \int\!\!\int u\frac{d^4u'}{dx^2dy^2}dx\,dy,$$

en désignant par y_1 et y_2 les ordonnées des deux points N_1 et N_2 où une droite parallèle à l'axe des y rencontre le contour. Dans la seconde intégrale simple, regardons dx comme la projection de deux éléments de la courbe $d\sigma_1$ et $d\sigma_2$ placés en N_1 et N_2, et désignons par a_1 et a_2 les angles de la normale en ces points avec l'axe des x; nous aurons

$$dx = d\sigma_2\sin a_2 = -d\sigma_1\sin a_1,$$

et la formule précédente peut s'écrire

$$(\mathrm{B})\quad \left\{\begin{aligned}&\int\!\!\int u'\frac{d^4u}{dx^2dy^2}dx\,dy\\ &\quad= -\int\left(\frac{d^3u}{dx\,dy^2}u' - \frac{du'}{dx}\frac{d^2u}{dy^2}\right)\cos\alpha\, ds\\ &\qquad+\int\left(\frac{d^2u'}{dx^2}\frac{du}{dy} - u\frac{d^3u'}{dx^2dy}\right)\sin\alpha\, ds + \int\!\!\int u\frac{d^4u'}{dx^2dy^2}dx\,dy.\end{aligned}\right.$$

Permutons x et y dans (B) et (A), et nous aurons

$$(\mathrm{C})\quad \left\{\begin{aligned} &\iint u' \frac{d^4 u}{dx^2\,dy^2}\,dx\,dy \\ &\quad = \int\left(\frac{d^3 u}{dy\,dx^2}\,u' - \frac{du'}{dy}\,\frac{d^2 u}{dx^2}\right)\sin\alpha\,ds \\ &\quad -\int\left(\frac{d^2 u'}{dy^2}\,\frac{du}{dx} - u\,\frac{d^3 u'}{dy^2\,dx}\right)\cos\alpha\,ds + \iint u\,\frac{d^4 u'}{dx^2\,dy^2}\,dx\,dy, \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{D})\left\{\begin{aligned} &\iint u' \frac{d^4 u}{dy^4}\,dx\,dy = \int\left(u'\,\frac{d^3 u}{dy^3} - \frac{d^2 u}{dy^2}\,\frac{du'}{dy} + \frac{du}{dy}\,\frac{d^2 u'}{dy^2} - u\,\frac{d^3 u'}{dy^3}\right)\sin\alpha\,ds \\ &\qquad\qquad + \iint u\,\frac{d^4 u'}{dy^4}\,dx\,dy. \end{aligned}\right.$$

Ajoutant (A), (B), (C), (D), posant en général

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} = \Delta v$$

et ayant égard aux deux équations aux différences partielles qui donnent u et u', on a

$$\begin{aligned} l^4 \iint uu'\,dx\,dy = &\int ds\,u'\left(-\frac{d\Delta u}{dx}\cos\alpha + \frac{d\Delta u}{dy}\sin\alpha\right) \\ &-\int ds\,\Delta u\left(-\frac{du'}{dx}\cos\alpha + \frac{du'}{dy}\sin\alpha\right) \\ &-\int ds\,\Delta u'\left(-\frac{du}{dx}\cos\alpha + \frac{du}{dy}\sin\alpha\right) \\ &+\int ds\,u\left(-\frac{d\Delta u'}{dx}\cos\alpha + \frac{d\Delta u'}{dy}\sin\alpha\right) + l'^4 \iint uu'\,dx\,dy. \end{aligned}$$

Si l'on désigne par dn l'élément de la normale au contour, on a en général

$$\frac{du}{dn} = -\frac{du}{dx}\cos\alpha + \frac{du}{dy}\sin\alpha,$$

cet élément de normale étant supposé mené à l'intérieur. Donc l'équation précédente peut s'écrire

$$(l^4 - l'^4)\iint uu'\,dx\,dy = \int ds\left(u'\,\frac{d\Delta u}{dn} - \Delta u\,\frac{du'}{dn} - \Delta u'\,\frac{du}{dn} + u\,\frac{d\Delta u'}{dn}\right),$$

et si l' est différent de l, on aura l'équation

$$\text{(E)} \qquad \int\int u u' \, dx \, dy = 0,$$

où l'intégrale double s'étend à toute la surface de la plaque, dans les quatre cas où l'on a sur le contour :

$$1^{\circ}\ u = 0, \quad \frac{du}{dn} = 0; \quad 2^{\circ}\ \Delta u = 0, \quad \frac{d\Delta u}{dn} = 0.$$

$$3^{\circ}\ u = 0, \quad \Delta u = 0; \quad 4^{\circ}\ \frac{du}{dn} = 0, \quad \frac{d\Delta u}{dn} = 0.$$

Car il est entendu que u' doit satisfaire aux mêmes conditions aux limites que u.

Dans ces quatre cas, l'expression de w donnée par les formules (3) et (4) est ce qu'on appelle une solution simple, et le mouvement le plus général qu'on peut imaginer pour la plaque est alors la somme d'une infinité de solutions simples. Posons

$$w = u_1(A_1 \sin l_1^2 at + B_1 \cos l_1^2 at) + u_2(A_2 \sin l_2^2 at + B_2 \cos l_2^2 at) + \ldots,$$

et nous aurons à déterminer les coefficients A et B qui entrent dans chaque solution simple d'après l'état initial supposé donné. Ainsi désignons par $f(x, y)$ et $F(x, y)$ les valeurs de w et $\frac{dw}{dt}$ pour $t = 0$, nous aurons

$$f(x, y) = B_1 u_1 + B_2 u_2 + \ldots + B_n u_n + \ldots,$$

$$\frac{1}{a} F(x, y) = l_1^2 A_1 u_1 + l_2^2 A_2 u_2 + \ldots + l_n^2 A_n u_n + \ldots.$$

Or, en multipliant ces deux équations par $u_n \, dx \, dy$ et intégrant dans toute l'étendue de la plaque, on réduira les seconds membres à ne contenir plus que les coefficients A_n et B_n : ce qui permettra de les déterminer.

5. Le premier cas se rapporte à la plaque encastrée.

Si l'on peut trouver la solution simple dans le premier cas, on l'ob-

tiendra aisément dans le second. Car si l'on pose

$$\Delta u = l^2 v,$$

on voit qu'on satisfera à l'équation (4), qu'on peut écrire

$$\Delta^2 u = l^4 u,$$

en faisant

$$\Delta v = l^2 u,$$

et il en résultera

$$\Delta^2 v = l^4 v.$$

Alors on voit que si u est une solution simple dans le premier cas, v en sera une pour le second cas.

Le troisième cas sera résolu immédiatement quand on connaîtra le mouvement vibratoire d'une membrane de même contour que la plaque.

En effet, l'équation qui régit le mouvement vibratoire d'un point quelconque de la membrane est

$$\Delta w = b^2 \frac{d^2 w}{dt^2},$$

et w est nul sur le contour. On obtient la solution simple en posant

$$(a) \qquad w = u(\mathrm{A} \sin lbt + \mathrm{B} \cos lbt),$$

et prenant pour u une fonction qui satisfait en un point quelconque (x, y) à l'équation

$$(b) \qquad \Delta u = - l^2 u$$

et sur le contour à la condition $u = 0$.

Or, pour le troisième cas des plaques, on a

$$(c) \qquad w = u(\mathrm{A} \sin l^2 at + \mathrm{B} \cos l^2 at),$$

et u a la même valeur que dans la formule (a); car de l'équation (b) on tire

$$\Delta^2 u = - l^2 \Delta u = l^4 u.$$

et la condition du contour $u = 0$ donne aussi $\Delta u = 0$, puisque l'on a l'équation (b) pour tous les points du contour. Les deux valeurs (a) et (c) de w ne diffèrent donc que par l'arc multiple de t qui y entre, et les hauteurs de deux sons résultant de deux états vibratoires simples de la membrane étant dans un certain rapport, les hauteurs des sons qui proviennent des états correspondants de la plaque sont dans un rapport qui est le carré du premier.

On voit de même aisément que le dernier cas ne dépend que d'une équation du second ordre et que u satisfait à l'équation (c) en un point quelconque et à l'équation $\frac{du}{dn} = 0$ sur le contour.

Le premier cas qui se rapporte à la plaque encastrée a un intérêt particulier, puisqu'on reconnaît tout de suite qu'on peut le réaliser expérimentalement; c'est pourquoi nous allons nous occuper du mouvement vibratoire d'une pareille plaque lorsque son bord est une ellipse.

Plaque elliptique encastrée.

4. Considérons d'abord la question, beaucoup plus facile, de la plaque circulaire. En général, en posant

$$w = u(\mathrm{A}\sin l^2 at + \mathrm{B}\cos l^2 at),$$

on a u par l'équation

$$\frac{d^4 u}{dx^4} + 2\frac{d^4 u}{dx^2 dy^2} + \frac{d^4 u}{dy^4} = l^4 u,$$

et en introduisant une quantité v, cette équation peut se décomposer en les deux suivantes

$$l^2 v = \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2}, \quad l^2 u = \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2}.$$

Posons

$$\mathrm{U} = \frac{u+v}{2}, \quad \mathrm{V} = \frac{u-v}{2},$$

il en résultera

$$u = \mathrm{U} + \mathrm{V},$$

et U et V seront donnés par les formules

$$(\mathrm{G})\qquad \begin{cases} -l^2\,\mathrm{V} = \dfrac{d^2\mathrm{V}}{dx^2} + \dfrac{d^2\mathrm{V}}{dy^2}, \\[2mm] l^2\,\mathrm{U} = \dfrac{d^2\mathrm{U}}{dx^2} + \dfrac{d^2\mathrm{U}}{dy^2}. \end{cases}$$

Employant les coordonnées polaires r et α, données par les équations

$$x = r\cos\alpha,\quad y = r\sin\alpha,$$

on change les deux équations précédentes en les suivantes

$$\frac{d^2\mathrm{V}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\mathrm{V}}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2\mathrm{V}}{d\alpha^2} = -\,l^2\,\mathrm{V},$$

$$\frac{d^2\mathrm{U}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\mathrm{U}}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2\mathrm{U}}{d\alpha^2} = l^2\,\mathrm{U}.$$

On obtiendra V en posant

$$\mathrm{V} = (\mathrm{A}\cos n\alpha + \mathrm{B}\sin n\alpha)\,\mathrm{CR}(r, l^2),$$

prenant pour n un nombre entier et

$$\mathrm{R}(r, l^2) = r^n\left[1 - \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^2 r^2}{1(n+1)} + \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^4 r^4}{1.2(n+1)(n+2)} - \ldots\right],$$

et V représente l'expression que l'on trouve quand on cherche le mouvement vibratoire d'une membrane circulaire.

On obtiendra U au moyen de V en changeant l^2 en $-\,l^2$, et on aura

$$u = (\mathrm{A}\cos n\alpha + \mathrm{B}\sin n\alpha)\left[\mathrm{CR}(r, l^2) + \mathrm{DR}(r, -\,l^2)\right].$$

On déterminera $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{C}}$ et l par les conditions du contour qui sont fournies par les équations

$$u = 0,\quad \frac{du}{dr} = 0$$

pour $r = r_1$, r_1 étant le rayon de la plaque.

Il est aisé de voir d'après cette formule que les lignes nodales sont

des cercles concentriques à la plaque et des diamètres qui les divisent en parties égales.

5. Occupons-nous ensuite de la plaque elliptique. Nous prendrons pour coordonnées α et β fournis par les formules

$$x = c\frac{e^{\beta}+e^{-\beta}}{2}\cos\alpha,\quad y = c\frac{e^{\beta}-e^{-\beta}}{2}\sin\alpha;$$

$\beta =$ const. représente une suite d'ellipses homofocales, et $\alpha =$ const. des hyperboles de mêmes foyers que ces ellipses. Au moyen de ces variables, si l'on pose $h = \frac{kc}{2}$, les équations (G) se transforment en les suivantes :

$$(\mathrm{P})\qquad \frac{d^2V}{d\alpha^2}+\frac{d^2V}{d\beta^2} = -2h^2\left(\frac{e^{2\beta}+e^{-2\beta}}{2}-\cos 2\alpha\right)V,$$

$$(\mathrm{Q})\qquad \frac{d^2U}{d\alpha^2}+\frac{d^2U}{d\beta^2} = +2h^2\left(\frac{e^{2\beta}+e^{-2\beta}}{2}-\cos 2\alpha\right)U.$$

On trouve l'équation (P) dans la théorie de la membrane elliptique; mais l'expression qui doit satisfaire à cette équation n'a plus ici une forme aussi simple, car V et U ne se réduisent pas au produit d'une fonction de α par une fonction de β.

Il faudra que U et V, dont la somme compose u, soient des fonctions qui aient par rapport à α la période 2π; car les expressions de x et y restent invariables quand on remplace α par $\alpha + 2\pi$; elles doivent de plus rester les mêmes après le double changement de α et β en $-\alpha$ et $-\beta$, parce que x et y restent invariables par ces changements de signe. Au reste on peut s'assurer que cette dernière condition revient à admettre que V, $\frac{dV}{dx}$ et $\frac{dV}{dy}$ varient d'une manière continue quand on traverse la droite qui joint les deux foyers.

Enfin la plaque étant encastrée sur l'ellipse dont le paramètre β a la valeur B, on a pour conditions aux limites

$$(\mathrm{R})\qquad V + U = 0,\quad \frac{dV}{d\beta}+\frac{dU}{d\beta} = 0$$

pour $\beta = B$.

Posons la formule

$$\text{(S)} \qquad V = P_0 + P_1\beta^2 + P_2\beta^4 + P_3\beta^6 + \ldots,$$

dans laquelle P_0, P_1, P_2,... sont des fonctions de α, et comme V est pair par rapport à β, P_0, P_1,... doivent être aussi des fonctions paires. Substituons cette expression dans l'équation (P), et nous aurons les équations

$$\frac{d^2P_0}{d\alpha^2} + 2P_1 + 2h^2(1-\cos 2\alpha)P_0 = 0,$$

$$\frac{d^2P_1}{d\alpha^2} + 3.4\,P_2 + 2h^2\left(\frac{4}{1.2}P_0 + P_1\right) - 2h^2\cos 2\alpha\, P_1 = 0,$$

$$\frac{d^2P_2}{d\alpha^2} + 5.6\,P_3 + 2h^2\left(\frac{16}{2.3.4}P_0 + \frac{4}{1.2}P_1 + P_2\right) - 2h^2\cos 2\alpha\, P_2 = 0,$$

....

Ainsi P_1, P_2,... sont des fonctions paires dont la période est 2π et qui dépendent de la seule P_0. Or, désignons par g un nombre entier et posons, si g est impair,

$$\begin{aligned} P_0 = {} & A\cos g\alpha + h^2[a_1\cos(g+2)\alpha + b_1\cos(g-2)\alpha] \\ & + h^4[a_2\cos(g+4)\alpha + b_2\cos(g-4)\alpha] + \ldots \\ & + h^{g-1}\left[a_{\frac{g-1}{2}}\cos(2g-1)\alpha + b_{\frac{g-1}{2}}\cos\alpha\right] \\ & + h^{g+1}a_{\frac{g+1}{2}}\cos(2g+1)\alpha + h^{g+3}a_{\frac{g+3}{2}}\cos(2g+3)\alpha + \ldots, \end{aligned}$$

et, si g est pair,

$$\begin{aligned} P_0 = {} & A\cos g\alpha + h^2[a_1\cos(g+2)\alpha + b_1\cos(g-2)\alpha] + \ldots \\ & + h^{g-2}\left[a_{\frac{g-2}{2}}\cos(2g-2)\alpha + b_{\frac{g-2}{2}}\cos 2\alpha\right] + h^g\left(a_{\frac{g}{2}}\cos 2g\alpha + b_{\frac{g}{2}}\right) \\ & + h^{g+2}a_{\frac{g+2}{2}}\cos(2g+2)\alpha + \ldots. \end{aligned}$$

Alors les fonctions P_1, P_2,... seront de même forme que P_0. En mettant en évidence les facteurs h^2, h^4,..., nous ne voulons pas marquer que a_1, b_1, a_2, b_2,... ne dépendent pas de h, mais bien qu'ils ne sont

pas infinis pour $h = 0$, de sorte que les facteurs h^2, h^4,... indiquent l'ordre par rapport à h des termes qu'ils multiplient.

Pour rendre ce que nous avons à dire plus aisé à comprendre, imaginons d'abord que h^2 soit très-petit, en sorte que l'on puisse négliger les termes en h^6, et supposons en outre que g ne soit pas moindre que 4; alors on pourra réduire P_0 à

$$\begin{aligned} P_0 = {} & A\cos g\alpha + h^2[a_1\cos(g+2)\alpha + b_1\cos(g-2)\alpha] \\ & + h^4[a_2\cos(g+4)\alpha + b_2\cos(g-4)\alpha]; \end{aligned}$$

la forme de P_0 étant connue, on pourra en déduire, par les formules que nous avons données, les expressions de P_1, P_2, P_3,..., dont j'écris seulement les deux premières :

$$\begin{aligned} 2P_1 = {} & [A(g^2 - 2h^2) + h^4(a_1 + b_1)]\cos g\alpha \\ & + h^2\{a_1[(g+2)^2 - 2h^2] + A\}\cos(g+2)\alpha \\ & + h^2\{b_1[(g-2)^2 - 2h^2] + A\}\cos(g-2)\alpha \\ & + h^4[(g+4)^2 a_2 + a_1]\cos(g+4)\alpha \\ & + h^4[(g-4)^2 b_2 + b_1]\cos(g-4)\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.3.4P_2 = {} & [A(g^4 - 4h^2g^2 - 8h^2 + 4h^4) \\ & + h^4(2g^2 + 4g + 4)a_1 + (2g^2 - 4g + 4)b_1]\cos g\alpha \\ & + \{Ah^2(2g^2 + 4g + 4 - 4h^2) \\ & \quad + h^2[(g+2)^4(1 - 4h^2) - 8h^2]a_1\}\cos(g+2)\alpha \\ & + \{Ah^2(2g^2 - 4g + 4 - 4h^2) \\ & \quad + h^2[(g-2)^4(1 - 4h^2) - 8h^2]b_1\}\cos(g-2)\alpha \\ & + h^4[(g+4)^2 a_2 + (2g^2 + 12g + 20)a_1 + A]\cos(g+4)\alpha \\ & + h^4[(g-4)^2 a_2 + (2g^2 - 12g + 20)b_1 + A]\cos(g-4)\alpha. \end{aligned}$$

On obtiendra ensuite la fonction U, qui satisfait à l'équation (Q), en changeant, dans V, h^2 en $-h^2$; ainsi on aura, en négligeant h^6,

$$U = \Pi_0 + \Pi_1\beta^2 + \Pi_2\beta^4 + \Pi_3\beta^6 + \ldots,$$

$$\begin{aligned} \Pi_0 = {} & A'\cos g\alpha - h^2[a'_1\cos(g+2)\alpha + b'_1\cos(g-2)\alpha] \\ & + h^4[a'_2\cos(g+4)\alpha + b'_2\cos(g-4)\alpha], \end{aligned}$$

et Π_1, Π_2,... se déduisent de Π_0 comme P_1, P_2,... de P_0, sauf le changement de h^2 en $-h^2$. Donc on formera Π_1, Π_2,... au moyen de P_1, P_2,..., par le changement de h^2 en $-h^2$, et en accentuant A, a_1, b_1, a_2, b_2.

D'après cela, on voit que les équations (R), qui ont lieu pour $\beta = B$, peuvent se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} &L\cos g\alpha + Mh^2\cos(g+2)\alpha + M'h^2\cos(g-2)\alpha \\ &\qquad + Nh^4\cos(g+4)\alpha + N'h^4\cos(g-4)\alpha = 0, \\ &\frac{dL}{d\beta}\cos g\alpha + \frac{dM}{d\beta}h^2\cos(g+2)\alpha + \frac{dM'}{d\beta}h^2\cos(g-2)\alpha + \ldots = 0. \end{aligned}$$

et on en déduira les dix équations

$$\begin{gathered} L = 0, \quad M = 0, \quad M' = 0, \quad N = 0, \quad N' = 0, \\ \frac{dL}{d\beta} = 0, \quad \frac{dM}{d\beta} = 0, \quad \frac{dM'}{d\beta} = 0, \quad \frac{dN}{d\beta} = 0, \quad \frac{dN'}{d\beta} = 0, \end{gathered}$$

qui renferment les dix quantités A, A', a_1, a_2, a'_1, a'_2, b_1, b_2, b'_1, b'_2 au premier degré, et qui sont homogènes par rapport à ces quantités.

En les éliminant, on aura une équation qui ne renfermera plus d'inconnu que h et pourra servir à le déterminer.

On voit bien maintenant comment on devrait traiter la question si l'on négligeait les puissances de h supérieures à h^{2n}. Ainsi la forme de la solution est connue; mais, quoique les séries employées soient toujours convergentes, les calculs que nous venons d'indiquer sont impraticables. Même dans le cas où l'excentricité $2c$ est très-petite et le son rendu un des plus graves que puisse donner la plaque, de sorte que l a une de ses plus petites valeurs, les calculs resteront très-compliqués, quoique h soit très-petit. En effet, il est vrai qu'alors on pourra réduire les séries qui donnent P_0, P_1, P_2,... à un petit nombre de termes; mais β sur le contour deviendra alors assez grand : ce qui obligera de prendre pour V un grand nombre de termes de la série (S).

Nous venons de donner l'expression de u quand elle est paire par rapport à α et β; si elle est impaire par rapport à ces deux variables,

on posera, pour l'obtenir,

$$V = p_0\beta + p_1\beta^3 + p_2\beta^5 + p_3\beta^7 + \ldots;$$

alors $p_1, p_2, \ldots$ se déduiront de p_0 par les équations

$$\frac{d^2 p_0}{d\alpha^2} + 2.3\, p_1 + 2h^2(1 - \cos 2\alpha)\, p_0 = 0,$$
$$\frac{d^2 p_1}{d\alpha^2} + 4.5\, p_2 + 2h^2\left(\frac{4}{1.2}\, p_0 + p_1\right) - 2h^2 \cos 2\alpha\, p_1 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On prendra, si g est impair,

$$p_0 = \mathrm{A}\sin g\alpha + h^2[a_1 \sin(g+2)\alpha + b_1 \sin(g-2)\alpha] + \ldots$$
$$+ h^{g-1}\left[a_{\frac{g-1}{2}} \sin(2g-1)\alpha + b_{\frac{g-1}{2}} \sin\alpha\right] + h^{g+1} a_{\frac{g+1}{2}} \sin(2g+1)\alpha + \ldots,$$

et, si g est pair,

$$p_0 = \mathrm{A}\sin g\alpha + \ldots + h^{g-2}\left[a_{\frac{g-2}{2}} \sin(2g-2)\alpha + b_{\frac{g-2}{2}} \sin 2\alpha\right]$$
$$+ h^g a_{\frac{g}{2}} \sin 2g\alpha + h^{g+2} a_{\frac{g+2}{2}} \sin(2g+2)\alpha + \ldots.$$

On déduit U de V comme ci-dessus, et les calculs se continuent de la même manière.

Plaque annulaire et elliptique encastrée sur ses deux contours.

6. Considérons une plaque dont les deux contours sont des ellipses homofocales et sont encastrés. Les calculs que nous allons donner pour cette question seraient moins difficiles à appliquer que ceux de la précédente, lorsque l'excentricité serait peu considérable. Il est facile de s'expliquer la raison de cette différence : on ne peut faire $c = 0$ et, par suite, $h = 0$, dans la question précédente, pour avoir le mouvement vibratoire d'une plaque circulaire, tandis que, dans les calculs suivants, on aura, en faisant $c = 0$, la solution qui se rapporte à la plaque dont les contours sont des cercles concentriques. On aurait donc une solution approchée du problème en supposant $c = 0$ dans

nos calculs; puis nos formules permettraient de traiter plus aisément le cas où l'excentricité serait petite. Le calcul où l'on fait $c = 0$ pourrait d'ailleurs être d'abord vérifié par une recherche expérimentale.

Posons

$$\beta = \varepsilon - l\frac{c}{2a}, \quad \frac{c^2}{2a} = m,$$

et les équations (P) et (Q) se changeront en les suivantes :

$$(\mathrm{P}') \qquad \frac{d^2V}{d\alpha^2} + \frac{d^2V}{d\varepsilon^2} = -l^2\left(a^2 e^{2\varepsilon} + \frac{m^2}{4}e^{-2\varepsilon} - \frac{c^2}{2}\cos 2\alpha\right)V,$$

$$(\mathrm{Q}') \qquad \frac{d^2U}{d\alpha^2} + \frac{d^2U}{d\varepsilon^2} = l^2\left(a^2 e^{2\varepsilon} + \frac{m^2}{4}e^{-2\varepsilon} - \frac{c^2}{2}\cos 2\alpha\right)U.$$

Développons V de la manière suivante :

$$V = X_0 + X_1\varepsilon + X_2\varepsilon^2 + X_3\varepsilon^3 + \ldots,$$

$X_0, X_1, X_2, \ldots$ étant des fonctions de α seul, et, en substituant dans (P′), nous aurons les équations

$$\frac{d^2X_0}{d\alpha^2} + 2X_2 = l^2\left(-a^2 - \frac{m^2}{4} + \frac{c^2}{2}\cos 2\alpha\right)X_0,$$

$$\frac{d^2X_1}{d\alpha^2} + 2.3X_3 = l^2\left(-a^2 - \frac{m^2}{4} + \frac{c^2}{2}\cos 2\alpha\right)X_1 + l^2\left(-2a^2 + \frac{m^2}{2}\right)X_0,$$

$$\frac{d^2X_2}{d\alpha^2} + 3.4X_4 = l^2\left(-a^2 - \frac{m^2}{4} + \frac{c^2}{2}\cos 2\alpha\right)X_2 + l^2\left(-2a^2 + \frac{m^2}{2}\right)X_1$$
$$- l^2\left(2a^2 + \frac{m^2}{2}\right)X_0,$$

. . . .

qui permettront de les déterminer toutes au moyen des deux premières X_0 et X_1.

Prenons pour X_0 et X_1 des développements analogues à celui que nous avons pris pour P_0 dans la question précédente; posons donc, g étant un nombre entier,

$$X_0 = A\cos g\alpha + c^2[a_1\cos(g+2)\alpha + b_1\cos(g-2)\alpha]$$
$$+ c^4[a_2\cos(g+4)\alpha + b_2\cos(g-4)\alpha] + \ldots$$
$$X_1 = B\cos g\alpha + c^2[c_1\cos(g+2)\alpha + d_1\cos(g-2)\alpha] + \ldots,$$

et nous savons qu'à une certaine distance du premier terme les puissances de c ne multiplient plus qu'un seul terme. Alors les fonctions X_2, $X_3, \ldots$ se mettront aisément sous la même forme.

De même, nous poserons

$$U = Y_0 + Y_1 \varepsilon + Y_2 \varepsilon^2 + Y_3 \varepsilon^3 + \ldots,$$

et Y_2, $Y_3, \ldots$ se déduiront de Y_0 et Y_1, comme X_2, $X_3, \ldots$ se déduisent de X_0 et X_1, pourvu qu'on remplace toutefois l^2 par $-l^2$.

Remarquons que nous pouvons déterminer la quantité a qui n'a pas encore été fixée de manière que ε soit nul sur le contour intérieur. Supposons donc que $\varepsilon = 0$ soit l'équation de ce contour; comme il est encastré, on a

$$X_0 + Y_0 = 0, \quad X_1 + Y_1 = 0,$$

ou

$$Y_0 = -X_0, \quad Y_1 = -X_1.$$

Il reste à satisfaire aux équations

$$V + U = 0, \quad \frac{dV}{d\varepsilon} + \frac{dU}{d\varepsilon} = 0,$$

sur le contour extérieur qui a pour équation $\varepsilon = b$, b étant une constante.

Supposons par exemple que c soit assez petit pour qu'on puisse négliger les termes en c^6; on voit aisément que les deux équations précédentes sont de la forme

$$\begin{gathered}
L \cos g\alpha + M \cos(g+2)\alpha + M' \cos(g-2)\alpha \\
+ N \cos(g+4)\alpha + N' \cos(g-4)\alpha = 0, \\
\frac{dL}{d\varepsilon} \cos g\alpha + \frac{dM}{d\varepsilon} \cos(g+2)\alpha + \ldots + \frac{dN'}{d\varepsilon} \cos(g-4)\alpha = 0;
\end{gathered}$$

elles ont lieu pour $\varepsilon = b$ et produisent les dix suivantes :

$$\begin{gathered}
L = 0, \quad M = 0, \ldots, \\
\frac{dL}{d\varepsilon} = 0, \quad \frac{dM}{d\varepsilon} = 0, \ldots;
\end{gathered}$$

elles sont du premier degré par rapport à $c, a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2$, et elles serviront à les déterminer ainsi que l.

On obtiendrait une solution simple d'un autre genre en prenant pour X_0 et X_1 des séries de sinus.

Toutes les considérations qui précèdent sont parfaitement rigoureuses; mais comme la physique mathématique doit se proposer de rendre compte des faits de l'expérience, nous allons chercher à les expliquer par des considérations qui n'ont pas la même rigueur, et que, pour cette raison, nous avons le plus grand soin de séparer des premières.

Les plaques que les physiciens font vibrer ordinairement ont leurs bords libres, et nous avons vu qu'on ne peut adopter pour les conditions sur les bords les trois équations données par Poisson et Cauchy; nous allons donc essayer de les déterminer d'après les résultats de l'expérience.

Si l'on fait vibrer une plaque circulaire, on obtient pour lignes nodales des cercles concentriques et des diamètres qui les divisent en parties égales.

Considérons ensuite une plaque elliptique. Savart, dans son Mémoire sur les plaques vibrantes, inséré dans les *Annales de Chimie et de Physique* (t. LXXIII, 1840), donne six figures qui représentent les lignes nodales d'une plaque elliptique, et il dit à l'occasion de ces lignes : « Dans les figures qui viennent avec une grande pureté, les lignes nodales, quel qu'en soit le nombre, sont des ellipses et des hyperboles d'une régularité qu'on pourrait appeler géométrique, et, ce qui est extrêmement remarquable, non-seulement toutes les ellipses nodales ont les mêmes foyers que l'ellipse du contour de la plaque, mais les hyperboles ont leurs foyers aux mêmes points. »

Ces résultats prouvent évidemment que la formule du mouvement vibratoire ne peut être qu'une solution simple, et que les conditions aux limites sont renfermées dans un des quatre cas examinés au n° 2

Il semble, d'après cela, que l'on doive s'arrêter aux conditions 2° :

$$(a)\qquad \Delta u = 0, \quad \frac{d\Delta u}{dn} = 0;$$

car si l'on suppose que le mouvement ne varie pas avec y, il en résulte pour les conditions aux extrémités libres d'une lame

$$(b)\qquad \frac{d^2 u}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3 u}{dx^3} = 0,$$

et ce sont en effet celles que l'on adopte.

Or, si u satisfait aux conditions (a) sur les bords, on posera $u = \text{U} + \text{V}$, et si la plaque est elliptique, U et V se développeront comme au n° 5. Si l'on a bien la solution voulue, comme on doit avoir pour lignes nodales des hyperboles homofocales avec l'ellipse du contour, u devra être divisible par une fonction de α; mais on trouve que cela est impossible.

Contentons-nous d'indiquer comment on peut constater cette impossibilité, qu'il suffit de reconnaître dans un cas particulier. Supposons $g = 3$; on aura pour solution

$$u = \text{P}_0 + \Pi_0 + (\text{P}_1 + \Pi_1)\beta^2 + (\text{P}_2 + \Pi_2)\beta^4 + \ldots,$$

où l'on fera, si l'on néglige h^4,

$$\text{P}_0 = \text{A}\cos 3\alpha + h^2(a\cos 5\alpha + b\cos\alpha),$$
$$\Pi_0 = \text{A}'\cos 3\alpha - h^2(a'\cos 5\alpha + b'\cos\alpha);$$

on en déduira $\text{P}_1, \text{P}_2, \Pi_1, \Pi_2$ d'après ce que nous avons vu au n° 5; enfin ces quatre fonctions étant calculées, on prouvera qu'on ne peut pas déterminer les coefficients a, b, A', a', b' si P_0 et Π_0 sont différents de zéro, de manière que les trois fonctions de α

$$\text{P}_0 + \Pi_0, \quad \text{P}_1 + \Pi_1 \quad \text{P}_2 + \Pi_2$$

aient un même diviseur commun; donc à plus forte raison u n'est pas divisible par une fonction de α.

Quel que soit le contour de la plaque, on ne peut donc adopter les

conditions (a) sur les bords. Des trois cas restants du n° 2, il n'y a évidemment de possible que le quatrième, pour lequel on a sur le contour

$$\frac{du}{dn} = 0, \quad \frac{d\Delta u}{dn} = 0.$$

Alors, si le contour est une ellipse, la valeur de u sera de la forme $u = f(\alpha)\mathrm{F}(\beta)$, comme celle que nous avons trouvée pour la membrane elliptique, et les lignes nodales sont des ellipses et des hyperboles homofocales; de plus le contour est un ventre de vibration : ce qui est assez conforme à l'expérience. Avec ces conditions aux limites, la théorie de la plaque elliptique à bords libres se déduit immédiatement de celle que nous avons donnée pour la membrane de même forme dans le tome précédent de ce journal.

Les équations (b) ne pourraient donc plus être admises pour les bords de la lame, et il faudrait y substituer les équations

$$(c) \qquad \frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{d^3u}{dx^3} = 0.$$

D'après un Mémoire de M. Lissajous (*Annales de Chimie et de Physique*, 1850), les conditions (b) pour les bords s'accorderaient assez bien avec les expériences; mais il faudrait voir si les formules (c) ne seraient pas autant d'accord, car, si l'on excepte les deux nœuds les plus proches de chaque extrémité, il a trouvé dans ses expériences que la distance entre deux nœuds consécutifs est la même sur toute la longueur de la lame. Ce physicien n'a pas non plus considéré d'états vibratoires donnant moins de cinq nœuds, et ceux où il y en a moins ne seraient pas moins utiles à examiner pour décider cette question.

Nouveau théorème concernant la fonction numérique $F(k)$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Nous désignons, à notre ordinaire, par

$$F(k)$$

le nombre des formes quadratiques binaires, primitives ou non, de déterminant $-k$, dont un au moins des coefficients extrêmes est impair. Soit m un nombre entier donné, impair et premier à 5, et t un entier variable, dont les valeurs successives sont celles de la suite naturelle

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ldots,$$

en s'arrêtant au moment où l'on cesserait d'avoir

$$10m - 25t^2 > 0.$$

Cela posé, le théorème que je veux énoncer ici consiste en ce que l'on a toujours

$$F(10m) + 2\Sigma F(10m - 25t^2) = 2\zeta_1(m),$$

équation où je représente, comme d'habitude, par

$$\zeta_1(m)$$

la somme des diviseurs de m, et où le signe sommatoire porte sur les valeurs de t.

Vérifions cette équation sur quelques exemples. Et d'abord, soit $m = 1$. Elle se réduit alors à

$$F(10) = 2,$$

ce qui est exact.

Pour $m = 3$, elle donne

$$F(30) + 2F(5) = 8,$$

ce qui est vrai aussi, attendu que l'on a, par un procédé direct,

$$F(5) = 2$$

et

$$F(30) = 4.$$

D'après notre énoncé même, nous ne pouvons pas prendre

$$m = 5.$$

Mais pour

$$m = 7,$$

il nous viendra

$$F(70) + 2F(70 - 25.1^2) = 2\zeta_1(7),$$

c'est-à-dire

$$F(70) + 2F(45) = 16.$$

Or on a d'une part

$$F(45) = 6,$$

et d'autre part

$$F(70) = 4.$$

La vérification cherchée a donc lieu.

Il en serait de même pour

$$m = 9,\ 11,\ 13,\ 17, \ldots;$$

mais à quoi bon pousser plus loin ces calculs?

L'équation

$$F(10m) + 2\sum F(10m - t^2) = \zeta_1(m),$$

où l'entier m est premier à 10, nous a paru mériter une mention spéciale; mais elle peut être généralisée : je veux dire qu'il y a une formule analogue, quoique naturellement un peu moins simple, pour le cas d'un entier donné quelconque. Ce sera le sujet d'un autre article.

Remarque au sujet de la fonction $\zeta_1(n)$ qui exprime la somme des diviseurs de n;

Par M. J. LIOUVILLE.

Cette remarque est bien simple et chacun pourra la vérifier tout de suite au moyen de la formule connue qui donne la valeur de $\zeta_1(n)$ en fonction des facteurs premiers entrant dans la composition de n et de leurs exposants. Soit a un des facteurs premiers dont il s'agit, et faisons

$$n = aq;$$

q sera naturellement un entier; mais deux cas peuvent se présenter suivant que q est ou n'est pas divisible par a. Quand q n'est pas divisible par a, on a, comme on sait,

$$\zeta_1(aq) = (a+1)\zeta_1(q).$$

Maintenant j'ajoute que quand

$$\frac{q}{a}$$

est entier, une autre équation presque aussi simple s'offre à nous, car alors

$$\zeta_1(aq) + a\zeta_1\left(\frac{q}{a}\right) = (a+1)\zeta_1(q).$$

La fonction

$$\zeta_1(n)$$

intervient (et même de plus d'une manière, ainsi que Jacobi l'a

montre le premier) dans l'expression du nombre des représentations d'un entier donné, par une somme de quatre carrés. On pourra donc tirer parti de la formule que nous venons de mettre sous les yeux du lecteur; mais la place nous manque pour de plus longs développements. Contentons-nous aujourd'hui d'ajouter que des considérations du même genre s'appliquent, non-seulement à la fonction numérique plus générale

$$\zeta_\mu(n)$$

qui représente la somme des puissances de degré μ des diviseurs de n et pour laquelle on obtient l'équation

$$\zeta_\mu(aq) + a^\mu \zeta_\mu\left(\frac{q}{a}\right) = (a^\mu + 1)\,\zeta_\mu(q),$$

mais encore aux fonctions

$$\rho_\mu(n), \quad \xi_\mu(n), \quad \omega_\mu(n), \ldots,$$

dont nous avons eu aussi à nous occuper souvent.

Étude sur les surfaces isothermes et sur les courants de chaleur, dans les milieux homogènes chauffés en un de leurs points;

PAR M. J. BOUSSINESQ.

Le but de ce Mémoire est de montrer les rôles que jouent, dans trois questions intéressantes concernant la propagation de la chaleur, *l'ellipsoïde principal* de M. Lamé et celui que j'ai appelé *ellipsoïde des conductibilités linéaires* [*].

M. Lamé a démontré qu'il y a, dans tout milieu homogène, un ellipsoïde tel, que, si l'on adopte pour axes des coordonnées un système quelconque de ses diamètres conjugués, l'équation de la chaleur prend la forme simple de celle de Fourier, mais avec trois coefficients distincts au lieu d'un seul, et que ces trois coefficients ne sont autres que les carrés des demi-diamètres correspondants. C'est l'ellipsoïde principal.

Je fais voir qu'il existe pour le même milieu un autre ellipsoïde, jouissant de cette propriété, que, si un courant de chaleur se propage à travers le milieu dans une direction quelconque, ce courant est égal à la dérivée, changée de signe, de la température suivant cette direction, multipliée par le carré du demi-diamètre correspondant. C'est l'ellipsoïde des conductibilités linéaires. Il a un diamètre commun avec l'ellipsoïde principal; de plus, les plans conjugués à ce diamètre sont les mêmes dans les deux surfaces, et les coupent suivant deux ellipses homothétiques, dont la plus grande appartient à l'ellipsoïde des conductibilités linéaires.

Les trois questions fondamentales que j'étudie, et où interviennent ces deux ellipsoïdes, sont : 1° *Propagation de la chaleur dans un mi-*

[*] *Voir* à ce sujet une Note insérée aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXV, p. 104, une autre Note insérée au tome LXVI, p. 1194, et ma Thèse (*Étude sur la Propagation de la chaleur dans les milieux homogènes*, Paris, 1867, chez M. Gauthier-Villars, libraire).

lieu indéfini; 2° *Propagation de la chaleur dans une barre rectiligne indéfinie*; 3° *Propagation de la chaleur dans une plaque très-mince et plane, indéfinie*. Dans ces trois cas, le milieu est supposé chauffé en un point unique, pris pour origine des coordonnées.

Dans la première question, les surfaces isothermes sont des ellipsoïdes concentriques, semblables et semblablement placés, dont l'un n'est autre que l'ellipsoïde principal. La chaleur se répand en tous sens à partir de l'origine : elle décrit des espèces de spirales, situées sur des cônes ou tourbillons de chaleur, dont le sommet est à l'origine, et qui ont pour directrices les intersections de l'ellipsoïde principal par les plans conjugués au diamètre commun des deux ellipsoïdes. Tout le long d'une même génératrice des cônes, les tangentes aux spirales qui la coupent sont parallèles. Pour obtenir une droite qui ait leur direction, il faut mener, au point où la génératrice s'appuie sur l'ellipse directrice, une tangente à cette ellipse, la prolonger dans un sens déterminé jusqu'à la rencontre de l'ellipsoïde des conductibilités linéaires, et joindre l'origine à son extrémité. Les spirales couperont toutes les génératrices sous un angle constant, si les deux ellipsoïdes sont de révolution autour de leur diamètre commun.

Dans la deuxième question, en supposant des barres taillées à partir de l'origine dans le même milieu, chauffées simultanément à cette origine, et rayonnant de la même manière (ce qui arrivera, par exemple, si elles sont d'égales dimensions et recouvertes d'un vernis qui leur donne la même conductibilité extérieure), je démontre que leurs points d'égale température seront situés, à chaque instant, sur des ellipsoïdes homothétiques par rapport à celui des conductibilités linéaires. De plus, leurs surfaces isothermes seront des éléments plans de direction constante pour une même barre, et celui d'entre ces éléments qui est à l'intersection de la barre par l'ellipsoïde des conductibilités linéaires deviendra, si on le prolonge, tangent à l'ellipsoïde principal. Les courants de chaleur sont rectilignes, car la chaleur s'écoule le long des barres.

Enfin, dans la troisième question, les courbes isothermes dessinées sur la plaque sont des ellipses situées sur des ellipsoïdes semblables à celui des conductibilités linéaires et semblablement placés. Plusieurs plaques, taillées suivant des sens différents dans le même milieu,

chauffées pareillement et rayonnant de la même manière, ont au même instant leurs courbes d'égale température sur des ellipsoïdes différents. On obtient, par exemple, les ellipsoïdes correspondants à une *certaine* température, la même chez toutes les plaques, si on construit, pour chacune d'elles, celui qui est tangent à l'intersection de la plaque considérée par l'ellipsoïde principal. Les surfaces isothermes, menées suivant les lignes d'égale température ainsi obtenues, sont des cylindres qui, prolongés, se trouvent être tangents à l'ellipsoïde principal.

La chaleur se répand dans chaque plaque en décrivant des spirales, et celles-ci sont parallèles entre elles aux points où elles coupent un même rayon émané de l'origine. La direction de leurs tangentes en ces points s'obtient d'une manière analogue à celle du premier cas : il faut mener, à l'intersection du rayon par la courbe d'égale température dont il vient d'être parlé, une tangente à cette courbe, la prolonger dans un sens déterminé jusqu'à la rencontre de l'ellipsoïde des conductibilités linéaires, et enfin joindre à son extrémité, par une droite, l'origine des coordonnées; cette dernière droite a même direction que les tangentes cherchées. Les spirales couperont tous les rayons sous un même angle, c'est-à-dire seront logarithmiques, si les courbes d'égale température sont des cercles.

Je ne pense pas que ces problèmes eussent déjà été traités dans leur ensemble. Je les croyais même absolument nouveaux lorsque j'ai présenté plusieurs d'entre eux, dans une Thèse, à la Faculté des Sciences de Paris. Mais, depuis, j'ai trouvé, aux tomes XXV, p. 870, et XXVII, p. 129, des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, deux articles où M. Duhamel traite des surfaces isothermes qui se produisent dans les milieux homogènes symétriques, soit indéfinis, soit taillés en plaques minces. M. Duhamel indique seulement ses résultats, qui concordent avec les miens dans l'hypothèse, qu'il adopte, de la symétrie du milieu [*].

§ I. — *Ellipsoïde principal.*

Soient, à l'époque t : x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque d'un milieu homogène en repos; u la température

[*] *Voir*, à la page suivante, la définition de cette symétrie.

de ce point; ρ la capacité du corps pour la chaleur sous l'unité de volume; $\varphi(u, t)$ la quantité de chaleur, rapportée à l'unité de volume et à l'unité de temps, que reçoit le corps autrement que par conductibilité. M. Lamé démontre, dans sa troisième *Leçon sur la Chaleur*, § XXIV, qu'on peut toujours choisir les axes des coordonnées de manière que l'équation de la température prenne la forme

$$(1) \qquad \rho\frac{du}{dt} = \varphi(u,t) + a^2\frac{d^2u}{dx^2} + b^2\frac{d^2u}{dy^2} + c^2\frac{d^2u}{dz^2}.$$

De plus, les trois flux de chaleur F_1, F_2, F_3, rapportés à l'unité de surface et à l'unité de temps, qui traversent les éléments plans perpendiculaires aux axes, en allant des parties positives de ceux-ci vers leurs parties négatives, peuvent s'écrire

$$(2) \quad F_1 = a^2\frac{du}{dx} - \nu\frac{du}{dy} + \mu\frac{du}{dz}, \quad F_2 = b^2\frac{du}{dy} - \lambda\frac{du}{dz} + \nu\frac{du}{dx}, \quad F_3 = c^2\frac{du}{dz} - \mu\frac{du}{dx} + \lambda\frac{du}{dy};$$

a^2, b^2, c^2, λ, μ, ν sont six coefficients de conductibilité, dépendants de la nature du corps. Je représente les trois premiers par des carrés, afin de rappeler qu'ils sont essentiellement positifs. Les trois autres peuvent être de signe quelconque : ils sont nuls dans les milieux étudiés par M. Duhamel, milieux *symétriques* par rapport aux trois plans coordonnés choisis, c'est-à-dire tels que les expressions des trois flux F_1, F_2, F_3 n'y changent pas, quand on change en son opposée la direction de l'un quelconque des axes.

M. Lamé appelle *principal* (*Leçons sur la Chaleur*, § XXVI) l'ellipsoïde

$$(3) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

et il fait voir que, si on le rapporte à un système quelconque de diamètres conjugués, de manière à mettre son équation sous la forme

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} + \frac{z'^2}{c'^2} = 1,$$

l'équation de la chaleur, avec le même système d'axes, sera

$$\rho \frac{du}{dt} = \varphi(u, t) + a'^2 \frac{d^2 u}{dx'^2} + b'^2 \frac{d^2 u}{dy'^2} + c'^2 \frac{d^2 u}{dz'^2}.$$

Cette proposition nous servira plus tard. Nous allons la démontrer simplement, en partant de la transformation

$$(4) \qquad \frac{x}{a} = \xi, \quad \frac{y}{b} = \eta, \quad \frac{z}{c} = \zeta,$$

qu'a employée M. Duhamel.

Afin d'abréger l'écriture, nous représenterons, dans la suite de ce Mémoire, par le signe S la somme de trois termes, dont le premier sera écrit après ce signe, et dont les deux autres se déduiraient de celui-là par une et par deux permutations circulaires effectuées sur les lettres correspondantes; ces lettres seront : x, y, z; ξ, η, ζ; a, b, c; λ, μ, ν; m, n, p;.... Par exemple, l'équation de l'ellipsoïde principal s'écrira $S\frac{x^2}{a^2} = 1$. Une relation telle que

$$(nz - py)m' + (px - mz)n' + (my - nx)p' = 0$$

s'écrira de même

$$S(nz - py)m' = 0.$$

Cela posé, les variables ξ, η, ζ, substituées à x, y, z, mettent les expressions

$$Sa^2 \frac{d^2 u}{dx^2} \quad \text{et} \quad S\frac{x^2}{a^2}$$

sous les formes respectives

$$S\frac{d^2 u}{d\xi^2} \quad \text{et} \quad S\xi^2.$$

Adoptons, pour nouveaux axes des coordonnées, un système quelconque de diamètres conjugués de l'ellipsoïde principal. L'équation de celui-ci prendra la forme

$$S\frac{x'^2}{a'^2} = 1; \quad \text{ce qui donne identiquement} \quad S\frac{x^2}{a^2} = S\frac{x'^2}{a'^2}.$$

Si nous posons

$$\frac{x'}{a'} = \xi', \quad \frac{y'}{b'} = \eta', \quad \frac{z'}{c'} = \zeta',$$

nous devrons donc avoir

$$S\xi^2 = S\xi'^2.$$

Or x, y, z, et, par suite, ξ, η, ζ, sont fonctions linéaires de x', y', z', ou de ξ', η', ζ'. En désignant par m, n, p; m', n', p'; m'', n'', p'' certains coefficients, on aura

$$(5) \quad \xi = m\xi' + m'\eta' + m''\zeta', \quad \eta = n\xi' + n'\eta' + n''\zeta', \quad \zeta = p\xi' + p'\eta' + p''\zeta'.$$

L'égalité de $S\xi^2$ à $S\xi'^2$ entraîne les six relations

$$(6) \quad Sm^2 = 1, \quad Sm'^2 = 1, \quad Sm''^2 = 1, \quad Sm'm'' = 0, \quad Sm''m = 0, \quad Smm' = 0.$$

Alors les équations (5), respectivement multipliées par m, n, p, ou par m', n', p', ou par m'', n'', p'', et ajoutées, donnent les relations inverses

$$\xi' = Sm\xi, \quad \eta' = Sm'\xi, \quad \zeta' = Sm''\xi.$$

De celles-ci on déduira, pour transformer les dérivées partielles de u, les formules

$$(7) \quad \begin{cases} \dfrac{d}{d\xi} = m\dfrac{d}{d\xi'} + m'\dfrac{d}{d\eta'} + m''\dfrac{d}{d\zeta'}, \\ \dfrac{d}{d\eta} = n\dfrac{d}{d\xi'} + n'\dfrac{d}{d\eta'} + n''\dfrac{d}{d\zeta'}, \\ \dfrac{d}{d\zeta} = p\dfrac{d}{d\xi'} + p'\dfrac{d}{d\eta'} + p''\dfrac{d}{d\zeta'}. \end{cases}$$

Elles sont pareilles aux relations (5), et changeront

$$S\frac{d^2u}{d\xi^2} \quad \text{en} \quad S\frac{d^2u}{d\xi'^2}, \quad \text{ou bien} \quad Sa^2\frac{d^2u}{dx^2} \quad \text{en} \quad Sa'^2\frac{d^2u}{dx'^2};$$

ce qu'il fallait démontrer.

§ II. — *Ellipsoïde des conductibilités linéaires.*

On sait qu'un élément plan quelconque, mené par le point (x, y, z), est actuellement traversé par un flux de chaleur, dont l'expression,

pour l'unité de surface et dans l'unité de temps, en appelant m, n, p les cosinus des angles que fait avec les axes la normale à l'élément, menée du côté d'où vient le flux, est

$$(8) \qquad F = mF_1 + nF_2 + pF_3 \text{ [*]}.$$

Ce flux sera nul, si la direction (m, n, p) de la normale est perpendiculaire à la direction (F_1, F_2, F_3), c'est-à-dire à celle qui fait avec les axes des angles dont les cosinus sont proportionnels à F_1, F_2, F_3. Soient f, g, h ces cosinus, et dl une ligne infiniment petite menée, à partir de (x, y, z), dans la direction correspondante. Tout élément superficiel passant par la ligne dl n'est donc traversé par aucun flux; ce qui revient à dire que, tout près de (x, y, z), la chaleur marche dans le sens de la ligne dl, ou y forme un courant dirigé suivant cette ligne. Proposons-nous de calculer la valeur de ce courant, en fonction de la dérivée partielle $\frac{du}{dl}$ de la température suivant la ligne dl. Les trois cosinus f, g, h étant proportionnels à F_1, F_2, F_3, on aura, d'après les relations (2),

$$(9) \qquad \frac{a^2\frac{du}{dx} - \nu\frac{du}{dy} + \mu\frac{du}{dz}}{f} = \frac{b^2\frac{du}{dy} - \lambda\frac{du}{dz} + \nu\frac{du}{dx}}{g} = \frac{c^2\frac{du}{dz} - \mu\frac{du}{dx} + \lambda\frac{du}{dy}}{h}.$$

Appelons k la valeur commune de ces trois rapports, et résolvons par rapport à $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dz}$. Nous obtiendrons

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\frac{du}{dx}}{b^2c^2f + \lambda S\lambda f + \nu c^2 g - \mu b^2 h} &= \frac{\frac{du}{dy}}{c^2a^2g + \mu S\lambda f + \lambda a^2 h - \nu c^2 f} \\ &= \frac{\frac{du}{dz}}{a^2b^2h + \nu S\lambda f + \mu b^2 f - \lambda a^2 g} \\ &= \frac{k}{a^2b^2c^2 + S\lambda^2 a^2}. \end{aligned} \right.$$

---

[*] *Voir* la deuxième *Leçon sur la Chaleur*, de M. Lamé, § XVIII.

Les trois dérivées partielles $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}$ sont proportionnelles aux cosinus des angles que fait avec les axes la normale à la surface isotherme $u = \text{const.}$, qui passe par (x, y, z); donc les rapports de ces trois dérivées partielles et la direction de la normale sont complétement déterminés, quand la direction (f, g, h) du courant l'est elle-même.

A l'inverse, si les mêmes surfaces restent surfaces isothermes à tous les instants consécutifs, les directions de leurs normales ne varieront pas avec le temps, et, par suite, d'après (9), les cosinus f, g, h conserveront en chaque point (x, y, z) les mêmes valeurs : la chaleur marchera suivant des lignes fixes, que nous appellerons *filets* ou *courants de chaleur,* et dont la tangente au point quelconque (x, y, z) aura la direction (f, g, h).

Ajoutons, terme à terme, les trois premiers rapports (10), après avoir multiplié les deux termes du premier par f, ceux du second par g et ceux du troisième par h. Si nous observons que $\mathrm{S} f \frac{du}{dx} = \frac{du}{dl}$, il viendra

$$(11) \qquad \frac{\frac{du}{dl}}{\mathrm{S}\, b^2 c^2 f^2 + (\mathrm{S}\lambda f)^2} = \frac{k}{a^2 b^2 c^2 + \mathrm{S}\lambda^2 a^2}, \quad \text{ou} \quad k = \frac{1 + \frac{\mathrm{S}\lambda^2 a^2}{a^2 b^2 c^2}}{\mathrm{S}\frac{f^2}{a^2} + \frac{(\mathrm{S}\lambda f)^2}{a^2 b^2 c^2}} \frac{du}{dl}.$$

La grandeur du courant est mesurée par le flux C, qui traverse l'élément plan perpendiculaire à la direction (f, g, h), en marchant suivant la ligne dl. La formule (8) et puis les relations (9) donnent

$$\mathrm{C} = -\mathrm{S} f\left(a^2 \frac{du}{dx} - \nu \frac{du}{dy} + \mu \frac{du}{dz}\right) = -\mathrm{S} f k f = -k,$$

ou bien, d'après (11),

$$(12) \qquad \mathrm{C} = \frac{1 + \frac{\mathrm{S}\lambda^2 a^2}{a^2 b^2 c^2}}{\mathrm{S}\frac{f^2}{a^2} + \frac{(\mathrm{S}\lambda f)^2}{a^2 b^2 c^2}} \frac{-du}{dl}.$$

Le coefficient de $\frac{-du}{dl}$, dans le second membre de cette relation, peut être appelé *coefficient de conductibilité du corps pour le courant*

de direction (f, g, h) : il mesure l'aptitude plus ou moins grande du milieu à transmettre la chaleur dans cette direction. Je l'appellerai aussi *coefficient de conductibilité linéaire*, car nous verrons plus loin que c'est celui d'une barre de même direction, taillée dans le milieu.

Portons à partir de l'origine, dans le sens (f, g, h) du courant, une ligne égale à la racine carrée de ce coefficient. Les extrémités de toutes les lignes pareilles donneront l'ellipsoïde

$$(13) \qquad S\frac{x^2}{a^2} + \frac{(S\lambda x)^2}{a^2b^2c^2} = 1 + \frac{S\lambda^2a^2}{a^2b^2c^2}.$$

Je l'appelle *ellipsoïde des conductibilités linéaires*. Il coïncide avec l'ellipsoïde principal (3) dans le cas des milieux symétriques, c'est-à-dire quand on a $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\nu = 0$. Si le milieu est peu dissymétrique, ou que les coefficients λ, μ, ν soient très-petits, on peut encore regarder les deux ellipsoïdes comme identiques sauf erreur négligeable, car ces coefficients n'entrent dans l'équation (13) que par leurs carrés et leurs produits.

En général, les deux ellipsoïdes n'ont que deux points communs. En effet, les valeurs de x, y, z qui vérifient leurs deux équations (3) et (13) donnent

$$S\frac{x^2}{a^2} = 1 \quad \text{et} \quad S\lambda x = \pm\sqrt{S\lambda^2a^2}.$$

La seconde de ces relations est l'équation de deux plans tangents à l'ellipsoïde principal, et perpendiculaires à la direction dont les angles avec les axes ont leurs cosinus proportionnels à λ, μ, ν. Ainsi les points communs aux deux ellipsoïdes se réduisent aux deux points de contact de ces plans avec l'ellipsoïde principal. Les deux surfaces y ont donc un diamètre commun et s'y touchent, c'est-à-dire que les plans $S\lambda x =$ const. y sont, chez tous les deux, conjugués au diamètre commun. L'un de ces plans, $S\lambda x = 0$, coupe, d'après (13), l'ellipsoïde des conductibilités linéaires suivant la même courbe que la surface

$$S\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{S\lambda^2a^2}{a^2b^2c^2},$$

semblable à l'ellipsoïde principal. Donc les courbes d'intersection des

deux ellipsoïdes par les plans conjugués au diamètre commun sont des ellipses homothétiques, dont les plus grandes appartiennent à celui des conductibilités linéaires : celui-ci est, par suite, extérieur à l'autre.

§ III. — *Surfaces isothermes et courants de chaleur dans un milieu homogène indéfini.*

Admettons qu'un milieu homogène indéfini soit primitivement à la température zéro, et qu'on vienne à le chauffer dans un très-petit espace, situé à l'origine des coordonnées et limité par la surface $f(x, y, z) = 0$. La température u prendra des valeurs qui vérifieront partout l'équation (1), et qui, de plus, pour $f(x, y, z) = 0$, équivaudront à celles données à chaque instant en fonction de x, y, z, t.

Effectuons la transformation (4). Les équations

$$\rho \frac{du}{dt} = \varphi(u, t) + \mathrm{S} a^2 \frac{d^2 u}{dx^2}, \quad \text{et} \quad f(x, y, z) = 0,$$

deviendront

$$\rho \frac{du}{dt} = \varphi(u, t) + \mathrm{S} \frac{d^2 u}{d\xi^2}, \quad f(a\xi, b\eta, c\zeta) = 0.$$

Considérons un milieu isotrope, qui aurait l'unité pour coefficient de conductibilité, et dont un point quelconque aurait pour coordonnées rectangulaires ξ, η, ζ. D'après les deux dernières équations, u représenterait sa température, si ce milieu était primitivement à zéro, et si on le chauffait dans un très-petit espace autour de l'origine, limité par la surface $f(a\xi, b\eta, c\zeta) = 0$. Or il est évident que, dans ce cas, la température serait la même au même instant pour tous les points situés à égale distance de l'origine. Ainsi u n'est fonction que de t et de $\mathrm{S}\xi^2$. On aura les surfaces isothermes en posant

$$\mathrm{S}\xi^2 = \text{const.}, \quad \text{ou bien} \quad \mathrm{S}\frac{x^2}{a^2} = \text{const.}$$

Les surfaces isothermes sont donc des ellipsoïdes concentriques, semblables et semblablement placés, dont l'un n'est autre que l'ellipsoïde principal.

En désignant par ψ une certaine fonction, et par ψ' une de ses dérivées partielles, nous pouvons poser

$$(14)\qquad u = \frac{1}{2}\psi\left(t,\ \mathrm{S}\frac{x^2}{a^2}\right),\quad \text{d'où}\quad \frac{du}{dx} = \psi'\frac{x}{a^2},\quad \frac{du}{dy} = \psi'\frac{y}{b^2},\quad \frac{du}{dz} = \psi'\frac{z}{c^2}.$$

Les équations (9) donneront, pour déterminer en chaque point la direction (f, g, h) du courant ou filet de chaleur qui y passe,

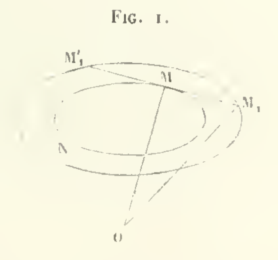
$$(15)\qquad \frac{f}{x_1} = \frac{g}{y_1} = \frac{h}{z_1},$$

dans lesquelles nous faisons

$$(16)\ x_1 = x - \nu\frac{y}{b^2} + \mu\frac{z}{c^2},\quad y_1 = y - \lambda\frac{z}{c^2} + \nu\frac{x}{a^2},\quad z_1 = z - \mu\frac{x}{a^2} + \lambda\frac{y}{b^2}.$$

Ces relations montrent d'abord qu'en tous les points d'un rayon quelconque mené à partir de l'origine, les cosinus (f, g, h) restent les mêmes, puisque x, y, z y varient à la fois dans un même rapport. Donc en tous ces points les courants de chaleur sont parallèles, et il suffit de considérer le point du rayon qui est situé sur l'ellipsoïde principal. Ce point étant $\mathrm{M}(x, y, z)$ (*fig.* 1), celui M_1, qui a pour coordonnées les valeurs correspondantes (16) de x_1, y_1, z_1, sera situé sur

Fig. 1.



l'ellipse d'intersection de l'ellipsoïde des conductibilités linéaires par le plan $\mathrm{S}\lambda x =$ const., mené en M et conjugué au diamètre commun des deux ellipsoïdes.

En effet, de (16) on tire d'abord

$$S\lambda x_1 = S\lambda x :$$

donc le point M_1 est sur le plan dont il vient d'être parlé. On en tire encore

$$x_1^2 = x^2 - 2x\left(\nu\frac{y}{b^2} - \mu\frac{z}{c^2}\right) + \left(\nu\frac{y}{b^2} - \mu\frac{z}{c^2}\right)^2,$$

et, par suite,

$$S\frac{x_1^2}{a^2} = S\frac{x^2}{a^2} + S\frac{1}{a^2}\left(\nu\frac{y}{b^2} - \mu\frac{z}{c^2}\right)^2.$$

En observant que l'on a identiquement

$$(17)\qquad S\frac{1}{a^2}\left(\nu\frac{y}{b^2} - \mu\frac{z}{c^2}\right)^2 = \frac{S\left(\nu c\frac{y}{b} - \mu b\frac{z}{c}\right)^2}{a^2b^2c^2} = \frac{S\lambda^2a^2 S\frac{x^2}{a^2} - (S\lambda x)^2}{a^2b^2c^2},$$

et $S\lambda x_1 = S\lambda x$, il vient

$$(17\ bis)\qquad S\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{(S\lambda x_1)^2}{a^2b^2c^2} = \left(1 + \frac{S\lambda^2a^2}{a^2b^2c^2}\right)S\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{S\lambda^2a^2}{a^2b^2c^2}.$$

Ainsi le point M_1 appartient bien à l'intersection de l'ellipsoïde des conductibilités linéaires par le plan $S\lambda x =$ const., qui passe en M.

Si λ, μ, ν changent de signe tout en conservant les mêmes valeurs absolues, l'ellipsoïde principal, qui ne dépend pas de ces coefficients, et celui des conductibilités linéaires, dont l'équation ne les contient qu'au second degré, resteront les mêmes; d'ailleurs les relations (16) font voir que, pour le même point $M(x, y, z)$ que dans le premier cas, les projections sur les trois axes $x_1 - x$, $y_1 - y$, $z_1 - z$ de la ligne qui joint ce point à (x_1, y_1, z_1) changent simplement de signe. On aura donc, au lieu du point primitif M_1, un autre point M'_1 de la même ellipse, sur le prolongement de M_1M, et à une distance MM'_1 égale à M_1M. Or nous avons vu à la fin du paragraphe précédent que le plan mené par M, perpendiculairement à la direction (λ, μ, ν), coupe

l'ellipsoïde principal suivant une ellipse MN concentrique et semblable à l'ellipse $M_1 M'_1$: donc la corde $M_1 M'_1$, que M divise en deux parties égales, s'y trouve tangente à l'ellipse MN.

On pourra, d'après cela, obtenir le point (x_1, y_1, z_1), en faisant passer, par le point donné M de l'ellipsoïde principal, un plan perpendiculaire à la direction λ, μ, ν, c'est-à-dire conjugué au diamètre qui est commun à cet ellipsoïde et à celui des conductibilités linéaires; la tangente en M à l'intersection de ce plan par l'ellipsoïde principal, prolongée de part et d'autre jusqu'à la rencontre de l'ellipsoïde des conductibilités linéaires, donnera le point cherché par l'une de ses deux extrémités. Il ne reste plus qu'à savoir laquelle de ces deux extrémités on devra choisir.

Pour cela, supposons, afin de fixer les idées, qu'on ait pris les axes de sens direct, c'est-à-dire l'axe des y à droite de celui des x, pour un observateur dont les pieds sont à l'origine et dont la tête est suivant la partie positive de l'axe des z. Représentons-nous un autre observateur, couché le long du diamètre commun, lieu des centres des ellipses MN, qui aurait les pieds à l'origine et la tête dans la direction dont les angles avec les axes ont pour cosinus $\frac{\lambda a^2}{\sqrt{S\lambda^2 a^4}}$, $\frac{\mu b^2}{\sqrt{S\lambda^2 a^4}}$, $\frac{\nu c^2}{\sqrt{S\lambda^2 a^4}}$: cherchons si cet observateur, tourné vers le point M, verra le point (x_1, y_1, z_1) à sa droite ou à sa gauche.

Les valeurs (16) de x_1, y_1, z_1 variant d'une manière continue quand x, y, z varient aussi d'une manière continue, il est clair que, si le point (x_1, y_1, z_1) est vu à droite ou à gauche de M dans une seule de ses positions, il le sera dans toutes. Prenons, par exemple, le point $M(x, y, z)$, à l'intersection de l'ellipse $S\frac{x^2}{a^2} = 1$, $S\lambda x = 0$, par le plan des yz, et du côté des y positifs. La première des relations (16), combinée avec $S\lambda x = 0$ et $x = 0$, donne

$$x_1 = -\frac{\lambda}{\nu}\left(\frac{\nu^2}{b^2} + \frac{\mu^2}{c^2}\right);$$

y étant positif, x_1 et ν ont signe contraire. Si ν est positif, l'observateur a la tête au-dessus du plan des xy, et, x_1 étant négatif, tandis

que $x = 0$ et que y est positif, le point $M_1(x_1, y_1, z_1)$ est vu à droite du point M. Si ν est négatif, l'observateur a la tête au-dessous du plan des xy, x_1 est positif, et M_1 est encore vu à droite de M.

Donc la tangente MM_1 doit être toujours menée de gauche à droite à partir du point M.

La droite OM_1, qui joint l'origine des coordonnées au point (x_1, y_1, z_1), a, d'après les relations (15), même direction que les courants de chaleur qui rencontrent OM. Des éléments infiniment petits de ces courants, pris à partir de leur intersection avec OM, sont donc dans le plan MOM_1, tangent au cône qui aurait pour sommet O et pour directrice l'ellipse MN : ils se trouvent par conséquent sur ce cône. Pour la même raison, les éléments suivants de ces courants seront encore sur le même cône, et ainsi de suite.

Donc les courants de chaleur sont des spirales tracées sur des cônes qui ont pour sommet commun l'origine et pour directrices les diverses sections de l'ellipsoïde principal par des plans conjugués au diamètre commun de cet ellipsoïde et de celui des conductibilités linéaires. Ces cônes, constitués par une infinité de courants pareils, sont de véritables tourbillons de chaleur. En s'écartant de l'origine, les spirales tournent de gauche à droite pour un observateur qui a les pieds à cette origine, et la tête dans la direction dont les angles avec les axes ont pour cosinus $\frac{\lambda a^2}{\sqrt{S\lambda^2 a^4}}$, $\frac{\mu b^2}{\sqrt{S\lambda^2 a^4}}$, $\frac{\nu c^2}{\sqrt{S\lambda^2 a^4}}$. Toutes celles qui se trouvent sur un même cône sont parallèles aux points où elles rencontrent la même génératrice; leur direction en ces points s'obtient en menant de gauche à droite, à l'intersection de la génératrice considérée et de l'ellipse directrice, une tangente à cette ellipse, et en joignant l'origine au point où cette tangente rencontre l'ellipsoïde des conductibilités linéaires. La chaleur décrit ainsi une infinité de tours, et, d'un tour à l'autre, s'écarte de l'origine qui est un point asymptote. Le seul courant qui soit rectiligne est celui qui correspond au cône central, c'est-à-dire au diamètre commun des deux ellipsoïdes.

Les expressions (14) des dérivées partielles de u, portées dans les relations (2), changent la formule générale (8) des flux de chaleur en

$$F = \psi' S m x_1.$$

La valeur du courant C s'obtient en faisant

$$m = \frac{-x_1}{\sqrt{Sx_1^2}},\quad n = \frac{-y_1}{\sqrt{Sx_1^2}},\quad p = \frac{-z_1}{\sqrt{Sx_1^2}},$$

d'où

$$C = -\psi'\sqrt{Sx_1^2}.$$

Aux divers points d'une même surface isotherme, le courant est proportionnel à $\sqrt{Sx_1^2}$, c'est-à-dire au rayon OM_1 de l'ellipsoïde des conductibilités linéaires, qui correspond à la génératrice OM sur laquelle est le point où l'on mesure le courant.

Un plan conjugué au diamètre commun des deux ellipsoïdes a pour équation $S\lambda x = \pm\delta\sqrt{S\lambda^2}$, δ désignant sa distance à l'origine. Le flux qui le traverse en venant de l'origine s'obtient en faisant

$$m = \frac{\mp\lambda}{\sqrt{S\lambda^2}},\quad n = \frac{\mp\mu}{\sqrt{S\lambda^2}},\quad p = \frac{\mp\nu}{\sqrt{S\lambda^2}};$$

il est égal à

$$-\psi'\delta.$$

Donc tout plan conjugué au diamètre commun des deux ellipsoïdes est coupé par deux tourbillons infiniment voisins suivant une couronne elliptique, traversée dans toute son étendue par un flux de chaleur constant, proportionnel, pour les couronnes adjacentes à un même ellipsoïde isotherme, aux distances de leurs plans à l'origine.

On trouverait encore que le flux qui sort par les divers éléments plans d'un ellipsoïde isotherme est égal à $-\psi'$, multiplié par la normale menée de l'origine aux plans de ces éléments.

§ IV. — *Cylindres et plans isothermes.*

Supposons que le milieu homogène, au lieu d'être chauffé en un seul point, le soit de la même manière en tous les points d'une droite indéfinie; il est clair que la température sera constante sur toute parallèle à cette droite. Si donc nous prenons celle-ci pour axe des z', et pour axes des x' et des y' deux droites formant avec elle un système

de diamètres conjugués de l'ellipsoïde principal, l'équation de la chaleur sera, d'après le § I,

$$(18)\qquad \rho\frac{du}{dt}=\varphi(u,t)+a'^2\frac{d^2u}{dx'^2}+b'^2\frac{d^2u}{dy'^2}.$$

Effectuons la transformation $\frac{x'}{a'}=\xi'$, $\frac{y'}{b'}=\eta'$, et cette équation deviendra

$$\rho\frac{du}{dt}=\varphi(u,t)+\frac{d^2u}{d\xi'^2}+\frac{d^2u}{d\eta'^2};$$

u, considéré comme fonction de ξ', η', t, exprimerait la température dans un milieu isotrope, où ξ', η', ζ' seraient des coordonnées rectangulaires d'un point quelconque, et où le coefficient de conductibilité vaudrait 1. De plus, les autres conditions reviendraient à dire que, pour $t=0$, $u=0$, et que sur un cylindre très-petit, presque identique à l'axe des ζ', la température est une fonction donnée de ξ', η', t. Or il est évident que, dans ce cas, u ne dépendrait que de t et de la distance de chaque point à l'axe des ζ'. Ainsi u est fonction de t et de $\xi'^2+\eta'^2$. L'équation des surfaces isothermes est $\xi'^2+\eta'^2=$ const., ou bien

$$(19)\qquad \frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}=\text{const.}$$

Elle représente des cylindres qui ont leurs génératrices parallèles à la droite chauffée et sont circonscrits aux ellipsoïdes isothermes du paragraphe précédent.

Concevons plusieurs milieux homogènes pareils et superposés, où la fonction $\varphi(u,t)$ soit la même, et dont la température initiale soit nulle. Supposons qu'on les chauffe simultanément suivant des droites différentes, menées à partir de l'origine, de manière que la condition relative à l'échauffement se trouve la même pour tous les milieux isotropes correspondants en ξ', η'. Il est clair que u sera pour tous la même fonction de ξ', η', t. Ainsi l'équation (19) représentera les cylindres d'égale température qui se produiront au même instant dans tous les milieux. Ces cylindres auront pour enveloppes les ellipsoïdes isothermes du paragraphe précédent, c'est-à-dire des surfaces homothétiques par rapport à l'ellipsoïde principal.

Reportons-nous à l'équation (18), et considérons en outre le cylindre isotherme

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} = 1.$$

Par la même origine, et sans changer l'axe des z', menons un plan quelconque pour nouveau plan coordonné, et adoptons deux axes des x'' et des y'' suivant deux diamètres conjugués de l'ellipse d'intersection du cylindre par ce plan. L'équation du cylindre deviendra de la forme

$$\frac{x''^2}{a''^2} + \frac{y''^2}{b''^2} = 1.$$

Les coordonnées x' et y' seront des fonctions linéaires de x'', y''. Donc on pourra raisonner absolument comme au § I, et mettre l'équation (18) sous la forme

$$\rho \frac{du}{dt} = \varphi(u, t) + a''^2 \frac{d^2 u}{dx''^2} + b''^2 \frac{d^2 u}{dy''^2}.$$

Concevons enfin un milieu indéfini, chauffé également sur toute l'étendue d'un plan. Il est clair que la température sera constante sur tout plan parallèle à celui-là. Prenons ce plan pour celui des $x'y'$, et dirigeons l'axe de z' suivant le diamètre conjugué de l'ellipsoïde principal. L'équation de la chaleur sera

$$\rho \frac{du}{dt} = \varphi(u, t) + c'^2 \frac{d^2 u}{dz'^2}. \tag{20}$$

Effectuons encore la même transformation $\zeta' = \frac{z'}{c'}$. L'équation deviendra

$$\rho \frac{du}{dt} = \varphi(u, t) + \frac{d^2 u}{d\zeta'^2}.$$

Soit une infinité de milieux pareils et superposés, ayant tous la même fonction $\varphi(u, t)$, et zéro pour température initiale. Supposons qu'on les porte simultanément à la même température suivant des plans différents passant par l'origine des coordonnées. Il est clair que les conditions exprimées en ζ'^2 et t seront les mêmes pour tous. Donc u sera pour tous la même fonction de ζ'^2 et t, et les surfaces d'égale

température auront pour équation $\zeta'^2 = \text{const.}$, ou $\frac{z'^2}{c'^2} = \text{const.}$ Ce sont des plans parallèles aux plans chauffés, et tangents aux surfaces $S\frac{x'^2}{a'^2} = \text{const.}$, qui ne sont autres que les ellipsoïdes isothermes du paragraphe précédent.

Les enveloppes des plans d'égale température dans les divers milieux seront donc des ellipsoïdes semblables à l'ellipsoïde principal, et semblablement placés.

Revenons à l'équation (20), et considérons les deux plans isothermes $\frac{z'^2}{c'^2} = 1$. Prenons, à partir de l'origine, un nouvel axe quelconque des z'', en laissant invariable le plan des $x'y'$. L'équation des deux plans précédents sera de la forme

$$\frac{z''^2}{c''^2} = 1, \quad \text{ce qui donne} \quad \frac{z'^2}{c'^2} = \frac{z''^2}{c''^2},$$

et l'équation (20) deviendra

$$\rho\frac{du}{dt} = \varphi(u, t) + c''^2\frac{d^2u}{dz''^2}.$$

Cette remarque, et la remarque analogue sur l'équation (18), constituent une extension du théorème de M. Lamé. En les joignant à ce théorème, on voit l'analogie qui existe entre l'équation différentielle de la température et celle des surfaces isothermes, soit que la chaleur se propage suivant les trois dimensions, soit qu'elle se propage suivant deux dimensions ou suivant une seule. Dans tous ces cas, si l'on considère la surface isotherme dont le paramètre est égal à 1, et qu'on adopte pour axes des coordonnées un système quelconque de diamètres conjugués de cette surface, l'équation des températures a la forme simple de celle de Fourier, avec des coefficients égaux aux carrés des demi-diamètres correspondants de la surface.

§ V. — *Propagation de la chaleur dans une barre.*

Après avoir étudié le mouvement de la chaleur dans un milieu indéfini en tous sens, nous allons traiter la même question

pour des corps ayant deux dimensions très-petites, ou seulement une seule. Nous appellerons les premiers des *barres*, les seconds des *plaques*.

Cherchons donc l'équation de la chaleur dans une barre homogène rectiligne, à section normale très-petite, mais d'ailleurs de forme quelconque.

Nous adopterons pour axes des coordonnées ceux de l'ellipsoïde principal, et nous supposerons que la barre parte de l'origine et s'étende indéfiniment dans la direction qui fait avec les axes des angles ayant les cosinus f, g, h.

Nous admettrons qu'elle soit placée dans un milieu dont chaque point se trouve à une température donnée en fonction du temps. Cette température sera supposée la même sur toute l'étendue d'une droite quelconque parallèle à la barre. Il est clair que tous les points de celle-ci, situés sur une même génératrice de la surface, se trouveront dans les mêmes conditions et rayonneront de la même manière vers le milieu environnant, pourvu qu'ils aient la même température. Le même fait aura lieu, sans que la température du milieu environnant soit constante sur toute parallèle à la barre, si celle-ci est placée très-loin des corps vers lesquels elle rayonne. Donc la chaleur rayonnante émise dans l'unité de temps et par l'unité de surface, sera, aux divers points d'une même génératrice, une fonction déterminée χ du temps t et de la température u au point considéré. La même chose arrivera si la barre est recouverte d'une substance, telle que la cire, qui fonde pendant l'expérience et fasse ainsi varier le pouvoir émissif. En effet, ce pouvoir pourra varier de deux manières : si la substance, tout en changeant d'état, continue à recouvrir la surface, le pouvoir émissif ne changera qu'avec son état et sera par conséquent une fonction déterminée de u; si au contraire la substance, en fondant, tombe ou se retire par un effet de capillarité, comme il arrivait dans plusieurs expériences de M. de Senarmont, le pouvoir émissif sera encore une fonction déterminée de u, car il ne sera autre que celui de la substance jusqu'à la température de fusion complète, et au delà il sera celui de la barre même. La fonction χ pourra varier d'une génératrice de la surface à une autre génératrice, soit parce que le pouvoir émissif ne sera pas le même pour toutes, soit encore parce que la tempéra-

ture du milieu environnant ne sera pas également distribuée tout autour.

Découpons la barre en éléments de volume, par des plans infiniment voisins parallèles entre eux. Soient : σ une section normale, s son contour, dl la distance de deux plans consécutifs, mesurée suivant la direction de la barre. L'élément compris entre les deux plans aura pour volume σdl, et la quantité de chaleur qu'il reçoit dans l'instant dt sera exprimée par $\rho \frac{du}{dt} dt \sigma dl$. Cette quantité de chaleur se compose de trois parties. Il y a d'abord, si le corps est diathermane, une partie reçue par rayonnement dans toute la masse, partie que nous supposerons de la forme $\varphi(u, t)\sigma dl dt$. En second lieu, la chaleur reçue par la surface latérale est, pour un élément $ds dl$ de cette surface, $-\chi(u, t) ds dl dt$; elle est donc pour toute la surface, en désignant par $\chi_1(u, t)$ la valeur moyenne de $\chi(u, t)$, $-\chi_1(u, t) s dl dt$. Enfin la troisième partie est la différence entre le flux que l'élément considéré σdl a reçu par une de ses bases de l'élément suivant, et celui qu'il a cédé par son autre base au précédent. Quelques réflexions nous permettront d'obtenir, presque sans nouveaux calculs, la différence de ces flux, et, par suite, l'équation de la chaleur dans la barre.

Les flux considérés, c'est-à-dire ceux qui traversent les bases d'un élément de volume, sont de même ordre de grandeur que ces bases, et, s'ils laissent varier d'une manière continue la température d'éléments de volume incomparablement plus petits, c'est qu'ils leur ôtent à chaque instant par une base presque autant de chaleur qu'ils leur en donnent par l'autre. Il n'en est pas ainsi des flux qui entrent ou qui sortent par la surface latérale. Ceux-ci sont indépendants les uns des autres, car ils ne varient qu'avec le pouvoir émissif, la température u et les circonstances extérieures; ils ne se neutralisent pas en général, et sont par conséquent de même ordre de grandeur que les éléments de volume, c'est-à-dire incomparablement plus petits que les premiers.

Soient m, n, p les cosinus des angles que fait, avec les axes des x, y, z, la normale à un élément de la surface. D'après les formules (2) et (8), le flux qui traverse cet élément est $\mathrm{S}\left(a^2 \frac{du}{dx} - \nu \frac{du}{dy} + \mu \frac{du}{dz}\right) m$.

Il doit être très-petit par rapport à d'autres flux, et conséquemment par rapport aux dérivées partielles de u en x, y, z. On peut donc égaler sensiblement à zéro son expression : ce qui signifie que l'élément de la surface est à très-peu près parallèle à la direction dont les angles avec les axes ont leurs cosinus proportionnels à

$$a^2\frac{du}{dx} - \nu\frac{du}{dy} + \mu\frac{du}{dz},\quad b^2\frac{du}{dy} - \lambda\frac{du}{dz} + \nu\frac{du}{dx},\quad c^2\frac{du}{dz} - \mu\frac{du}{dx} + \lambda\frac{du}{dy}.$$

A cause de la continuité, les dérivées partielles de u en x, y, z varient très-peu sur toute l'étendue d'une même section très-petite de la barre par un plan ; on peut les regarder comme égales à la valeur qu'elles ont en un point particulier de la section, et mettre cependant pour m, n, p les cosinus relatifs à une normale quelconque de la surface. Or la seule direction parallèle à tous les éléments de la surface est celle de la barre. On aura donc à très-peu près les égalités (9), qui signifient que le courant de chaleur en chaque point est sensiblement dirigé dans le sens même (f, g, h) de la barre, et qu'au même degré d'approximation les surfaces isothermes sont des éléments plans parallèles entre eux, de direction déterminée.

Concevons actuellement qu'au lieu de la barre nous ayons le corps, supposé indéfini, d'où elle a été tirée, et que la température vérifie dans ce corps les équations (9). Les surfaces isothermes y seront les mêmes plans, mais indéfinis, que dans la barre. Si nous adoptons un axe des z', suivant la droite conjuguée à ces plans dans l'ellipsoïde principal, l'équation (20) sera celle des températures dans le milieu. La conductibilité y donnera donc, par unité de volume et dans l'unité de temps, une quantité de chaleur égale à $c'^2\frac{d^2u}{dz'^2}$.

Cela posé, découpons par la pensée, dans le milieu indéfini, une barre exactement égale à la proposée, et divisons cette barre en éléments de volume, comme nous l'avons fait pour la proposée elle-même. Les équations (9) étant rigoureusement vérifiées, les flux sont nuls à travers la surface latérale de ces éléments, et la différence des flux qui traversent leurs bases fournit à elle seule le terme $c'^2\frac{d^2u}{dz'^2}$. Cela sera vrai de quelque manière que la température varie d'un plan isotherme

à un autre plan isotherme. Si donc nous supposons qu'à l'époque t, u varie d'un de ces plans aux suivants, à très-peu près comme dans la barre proposée, les températures seront sensiblement distribuées dans celle-ci comme dans la barre idéale; par conséquent les flux relatifs aux bases seront à très-peu près égaux dans les deux barres pour tous les éléments de volume, et la différence des deux consécutifs qui traversent les deux bases de l'élément σdl vaudra chez toutes les deux $c'^2 \frac{d^2 u}{dz'^2} \sigma dl\, dt$.

En égalant à $\rho \frac{du}{dt} \sigma dl\, dt$ la somme de cette quantité et des deux autres termes $\varphi(u,t)\sigma dl\, dt$, $-\chi_1(u,t) s\, dl\, dt$, on obtient l'équation des températures dans la barre

$$\rho \frac{du}{dt} = \varphi(u,t) - \chi_1(u,t)\frac{s}{\sigma} + c'^2 \frac{d^2 u}{dz'^2}.$$

Elle est pareille à l'équation (20), relative aux plans isothermes dans le milieu indéfini, et donnera lieu aux mêmes conséquences, que je vais développer.

1° Si plusieurs barres, taillées dans le même milieu et ayant le terme $-\chi_1(u,t)\frac{s}{\sigma}$ égal, partent en divers sens de l'origine des coordonnées et sont chauffées simultanément à cette origine, les plans d'égale température seront tangents chez toutes aux mêmes ellipsoïdes $S\frac{x^2}{a} = \text{const}$. La normale au plan isotherme tangent en un point (x, y, z) de ces ellipsoïdes fait avec les axes des angles dont les cosinus sont proportionnels à $\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2}$. Ces quantités sont entre elles comme les dérivées partielles de u en x, y, z et peuvent leur être substituées dans les relations (9). Appelons, d'autre part, x_1, y_1, z_1, les coordonnées du point d'intersection du même plan isotherme par la barre, supposée réduite à une simple droite, et nous pourrons, dans les mêmes relations, remplacer f, g, h par x_1, y_1, z_1. Nous aurons ainsi

$$\frac{x_1}{x - \nu\frac{y}{b^2} + \mu\frac{z}{c^2}} = \frac{y_1}{y - \lambda\frac{z}{c^2} + \nu\frac{x}{a^2}} = \frac{z_1}{z - \mu\frac{x}{a^2} + \lambda\frac{y}{b^2}}.$$

Désignons par q la valeur commune de ces rapports, et tirons les valeurs de x_1, y_1, z_1, pour les porter dans l'équation du plan tangent isotherme

$$S\frac{xx_1}{a^2} = S\frac{x^2}{a^2}; \quad \text{celle-ci devient} \quad S\frac{x^2}{a^2} = qS\frac{x^2}{a^2}, \quad \text{ou} \quad q = 1.$$

Les valeurs de $(x_1 y_1, z_1)$ sont par conséquent données par les relations (16), et les lieux géométriques des points d'égale température sur toutes les barres seront, d'après (17 *bis*), des ellipsoïdes semblables à celui des conductibilités linéaires et semblablement placés.

2° Si l'on prend, à partir de l'origine, au lieu de l'axe des z', un autre axe des z'' qui aille rencontrer à une distance c'' le plan isotherme $z' = c'$, l'équation de la chaleur dans la barre deviendra

$$\rho\frac{du}{dt} = \varphi(u, t) - \chi_1(u, t)\frac{s}{\sigma} + c''^2\frac{d^2u}{dz''^2}.$$

Il est naturel de choisir pour axe coordonné une droite prise dans la barre et de même direction (f, g, h). Désignons par l la distance à l'origine d'un point quelconque de cette droite, et par K la distance à la même origine du point où la droite rencontre le plan isotherme $z' = c'$. L'équation de la température le long de l'axe, ou le long de toute droite voisine, sera

$$(21) \qquad \rho\frac{du}{dt} = \varphi(u, t) - \chi_1(u, t)\frac{s}{\sigma} + K^2\frac{d^2u}{dl^2};$$

K^2 est le coefficient de conductibilité de la barre : il vaut le carré de la distance à l'origine du point où la barre rencontre son plan isotherme tangent à l'ellipsoïde principal, c'est-à-dire, d'après (17 *bis*), qu'il n'est autre que le coefficient de conductibilité linéaire du milieu dans la direction de la barre. C'est même pour cela que ce dernier a été ainsi désigné au § II.

On serait arrivé directement à l'équation (21), en décomposant la barre en éléments de volume par des plans perpendiculaires à sa direction (f, g, h), et en observant que le flux qui traverse l'un de ces plans est, rapporté à l'unité de temps, égal au courant de chaleur $K^2\frac{-du}{dl}\sigma$.

§ VI. *Propagation dans une plaque. — Cylindres isothermes.*

Proposons-nous maintenant d'étudier le mouvement de la chaleur dans une plaque plane indéfinie, tirée d'un milieu homogène, et d'une épaisseur très-petite et constante ε. Cette plaque sera supposée chauffée en un de ses points, pris pour origine des coordonnées x, y, z. Quant à la température du milieu environnant, nous la supposerons en chaque point une fonction donnée de t. Cette fonction pourra être arbitraire, si la plaque est très-éloignée des corps vers lesquels elle rayonne; dans le cas contraire, elle sera supposée la même sur toute l'étendue d'un plan quelconque parallèle à la plaque.

Les considérations données au commencement du paragraphe précédent font voir que les flux émis par les deux faces auront pour somme, sur l'unité de surface et dans l'unité de temps, une fonction déterminée χ_1 de u et de t. Elles montrent aussi qu'on pourra regarder comme sensiblement nulle l'expression de ces flux en fonction des dérivées partielles de la température.

Désignons par f', g', h' les cosinus des angles que fait avec les axes une normale à la plaque. Le flux qui traverse une des faces aura pour expression

$$S\left(a^2\frac{du}{dx} - \nu\frac{du}{dy} + \mu\frac{du}{dz}\right)f' = S(a^2 f' + \nu g' - \mu h')\frac{du}{dx}.$$

Cette quantité sera très-petite sur chacune des deux faces et, par suite, dans toute la plaque : ce qui signifie que les surfaces isothermes sont sensiblement parallèles en tous leurs points à une droite qui ferait avec les axes des angles ayant leurs cosinus proportionnels à

$$(21\ bis)\qquad a^2 f' + \nu g' - \mu h',\quad b^2 g' + \lambda h' - \nu f',\quad c^2 h' + \mu f' - \lambda g'.$$

Donc, dans une plaque, les surfaces isothermes sont à très-peu près des cylindres de forme variable, mais dont les génératrices ont une direction parfaitement déterminée.

Concevons actuellement qu'au lieu de la plaque nous ayons le milieu d'où elle a été tirée, et que la température vérifie rigoureusement dans

ce milieu l'équation

$$(22)\qquad S(a^2 f' + \nu g' - \mu h')\frac{du}{dz} = 0;$$

u s'y trouvera la même sur toute droite parallèle à la direction indiquée ci-dessus, et, si l'on adopte un axe des z' suivant cette direction, deux axes des x' et des y' conjugués entre eux et avec celui des z' dans l'ellipsoïde principal, l'équation de la température dans le milieu sera (18), et la conductibilité donnera, par unité de volume et dans l'unité de temps, une quantité de chaleur égale à

$$(23)\qquad a'^2\frac{d^2u}{dx'^2} + b'^2\frac{d^2u}{dy'^2}.$$

Cela posé, découpons par la pensée, dans le milieu indéfini, une plaque égale à la proposée, et divisons-la en parallélipipèdes élémentaires au moyen de deux systèmes de plans parallèles. L'équation (22) étant rigoureusement vérifiée, les flux sont nuls à travers les deux bases de ces éléments, et les différences des flux qui traversent les faces latérales donnent à elles seules toute la chaleur reçue par conductibilité. Cela sera vrai, de quelque manière que varie la température d'une droite isotherme à une autre droite isotherme. Si donc nous supposons qu'à l'époque t, u varie d'une de ces droites aux autres à très-peu près comme dans la plaque proposée, la température sera sensiblement distribuée de la même manière dans les deux plaques, et les flux relatifs aux faces latérales des parallélipipèdes élémentaires donneront pour toutes les deux, par unité de volume et dans l'unité de temps, une quantité de chaleur exprimée par (23).

Si nous y joignons la chaleur rayonnante $\varphi(u,t)$, et celle que reçoit la surface, laquelle vaut $-\chi_1(u,t)$ par unité de surface et $-\frac{1}{\varepsilon}\chi_1(u,t)$ pour l'unité de volume, nous aurons l'équation de la température dans la plaque

$$\rho\frac{du}{dt} = \varphi(u,t) - \frac{1}{\varepsilon}\chi_1(u,t) + a'^2\frac{d^2u}{dx'^2} + b'^2\frac{d^2u}{dy'^2}.$$

Elle est pareille à l'équation (18), relative aux cylindres isothermes du milieu indéfini, et donnera les mêmes conséquences.

Par exemple, si l'on conçoit passant par l'origine plusieurs plaques, tirées d'un même milieu, ayant le même terme $-\frac{1}{\varepsilon}\chi_1(u,t)$, et chauffées pareillement à l'origine, les cylindres d'égale température seront pour toutes circonscrits à de mêmes ellipsoïdes semblables à l'ellipsoïde principal et semblablement placés.

Si, de plus, on prend, à partir de la même origine, au lieu des axes des x' et des y', deux autres axes quelconques des x'' et des y'', qui mettent l'équation du cylindre isotherme

$$(24)\qquad \frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}=1 \quad \text{sous la forme} \quad \frac{x''^2}{a''^2}+\frac{y''^2}{b''^2}=1,$$

l'équation de la chaleur dans la plaque deviendra

$$(25)\qquad \rho\frac{du}{dt}=\varphi(u,t)-\frac{1}{\varepsilon}\chi_1(u,t)+a''^2\frac{d^2u}{dx''^2}+b''^2\frac{d^2u}{dy''^2}\,[^*].$$

§ VII. — *Ellipses isothermes.*

Il est spécialement intéressant d'obtenir l'intersection du cylindre isotherme (24) par la plaque correspondante, afin de connaître la forme des ellipses isothermes dessinées sur les faces de la plaque, et aussi afin d'avoir l'équation (25) au moyen de coordonnées x'', y'' prises parallèlement à deux diamètres conjugués de ces ellipses. Pour cela, nous allons d'abord chercher l'équation du cylindre (24) en fonction des coordonnées x, y, z.

En désignant par x, y, z les coordonnées courantes, par x_0, y_0, z_0 celles d'un point de l'ellipsoïde principal, les équations d'une génératrice seront

$$(26)\qquad \frac{x-x_0}{a^2f'+\nu g'-\mu h'}=\frac{y-y_0}{b^2g'+\lambda h'-\nu f'}=\frac{z-z_0}{c^2h'+\mu f'-\lambda g'}.$$

---

[*] On peut voir dans ma Thèse *Étude sur la Propagation de la chaleur dans les milieux homogènes*, §§ IX et XV, une autre méthode, toute différente, pour obtenir les équations de la température dans une barre et dans une plaque. Paris, 1867, chez M. Gauthier-Villars, libraire.

Pour exprimer que la génératrice est située sur un plan tangent, on aura les relations

$$(27)\qquad S\frac{x_0^2}{a^4}=1,\quad S\frac{xx_0}{a^2}=1,\quad S(a^2f'+\nu g'-\mu h')\frac{x_0}{a^2}=0.$$

Ajoutons terme à terme les rapports (26), après avoir multiplié les deux termes du premier par $\frac{x}{a^2}$, ceux du second par $\frac{y}{b^2}$ et ceux du troisième par $\frac{z}{c^2}$. Ajoutons encore terme à terme les mêmes rapports, après avoir multiplié leurs deux termes respectivement par les expressions (21 *bis*), et les avoir divisés ensuite par a^2, b^2, c^2; puis égalons les deux résultats, et tenons compte de (27). Nous aurons l'équation du cylindre isotherme

$$(28)\qquad \left(S\frac{x^2}{a^2}-1\right)S\left(af'+\frac{\nu g'-\mu h'}{a}\right)^2=\left(S\frac{a^2f'+\nu g'-\mu h'}{a^2}x\right)^2.$$

A l'intersection de ce cylindre par la plaque $Sf'x=0$, son équation se réduit à

$$(29)\qquad \left(S\frac{x^2}{a^2}-1\right)S\left(af'+\frac{\nu g'-\mu h'}{a}\right)^2=\left(S\frac{\nu g'-\mu h'}{a}\frac{x}{a}\right)^2.$$

Or on a identiquement

$$S\left(af'+\frac{\nu g'-\mu h'}{a}\right)^2=Sa^2f'^2+S\left(\frac{\nu g'-\mu h'}{a}\right)^2,$$

et, en remplaçant, dans l'identité $(Saa')^2=Sa^2Sa'^2-S(bc'-cb')^2$, a par $\frac{\nu g'-\mu h'}{a}$, a' par $\frac{x}{a}$, et de même b et b', c et c' par des expressions analogues,

$$(30)\quad S\left(\frac{\nu g'-\mu h'}{a}\frac{x}{a}\right)^2=S\left(\frac{\nu g'-\mu h'}{a}\right)^2S\frac{x^2}{a^2}-S\left(\frac{\lambda h'-\nu f'}{b}\frac{z}{c}-\frac{\mu f'-\lambda g'}{c}\frac{y}{b}\right)^2.$$

D'ailleurs on peut mettre $-f'x$ au lieu de $g'y+h'z$, dans cette dernière identité, ce qui change son dernier terme en $-\frac{Sa^2f'^2(S\lambda x)^2}{a^2b^2c^2}$:

et l'équation (29) devient

$$\mathrm{S}\frac{x^2}{a^2} + \frac{(\mathrm{S}\lambda x)^2}{a^2 b^2 c^2} = 1 + \frac{\mathrm{S}(\nu c\, bg' - \mu b\, ch')^2}{a^2 b^2 c^2\, \mathrm{S}a^2 f'^2}.$$

Considérons la direction fixe dont les angles avec les axes ont leurs cosinus proportionnels à λa, μb, νc, et la direction, variable d'une plaque à l'autre, dont les cosinus pareils sont proportionnels à af', bg', ch'. Si nous appelons θ l'angle de ces deux directions, nous aurons

$$\mathrm{S}(\nu c\, bg' - \mu b\, ch')^2 = \mathrm{S}\lambda^2 a^2\, \mathrm{S}a^2 f'^2 - (\mathrm{S}\lambda a^2 f')^2 = \mathrm{S}\lambda^2 a^2\, \mathrm{S}a^2 f'^2 \sin^2\theta.$$

Les équations de l'ellipse isotherme seront donc, d'abord celle de la plaque $\mathrm{S}f'x = 0$, et ensuite celle-ci :

$$(31) \qquad \mathrm{S}\frac{x^2}{a^2} + \frac{(\mathrm{S}\lambda x)^2}{a^2 b^2 c^2} = 1 + \frac{\mathrm{S}\lambda^2 a^2 \sin^2\theta}{a^2 b^2 c^2}.$$

Cette ellipse est située sur l'ellipsoïde (31), semblable à celui des conductibilités linéaires et semblablement placé. Les plaques dont les ellipses se trouvent sur un même ellipsoïde sont celles pour lesquelles θ a la même valeur, c'est-à-dire celles pour lesquelles les deux directions $(\lambda a, \mu b, \nu c)$ et (af', bg', ch') font un angle égal.

Cherchons les points communs aux trois intersections respectives de la plaque et des ellipsoïdes principal et (31). Les coordonnées de ces points vérifieront : 1° l'équation de l'ellipsoïde principal $\mathrm{S}\frac{x^2}{a^2} = 1$; 2° celle de la plaque $\mathrm{S}af'\frac{x}{a} = 0$; 3° enfin l'équation (31), qui se réduit à $\left(\mathrm{S}\frac{\lambda a}{\sqrt{\mathrm{S}\lambda^2 a^2}}\frac{x}{a}\right)^2 = \sin^2\theta$. La première de ces trois relations indique que $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{b}$, $\frac{z}{c}$ sont les cosinus des angles que fait avec les axes une certaine direction. La deuxième montre que cette direction est perpendiculaire à celle dont les angles avec les axes ont leurs cosinus proportionnels à af', bg', ch', ou qu'elle est celle d'une ligne située dans un plan perpendiculaire à (af', bg', ch'). Enfin, d'après la troisième, la même direction cherchée, ou son prolongement, fait avec

la direction fixe $(\lambda a, \mu b, \nu c)$ un angle égal au complément de θ. Donc elle n'est autre que l'intersection d'un plan perpendiculaire à (af', bg', ch') par le plan qui contient l'angle θ, c'est-à-dire par celui qui est mené suivant les deux directions (af', bg', ch') et $(\lambda a, \mu b, \nu c)$.

Ainsi les courbes isothermes situées sur l'ellipsoïde (31) ne rencontrent qu'en deux points opposés, aux extrémités d'un diamètre de l'ellipsoïde principal, l'intersection de ces deux surfaces. Cette intersection se compose des deux ellipses égales

$$(32) \qquad S\frac{x^2}{a^2} = 1, \quad S\lambda x = \pm\sqrt{S\lambda^2 a^2}\sin\theta,$$

entre lesquelles sont comprises toutes les ellipses isothermes. De même les plaques coupent l'ellipsoïde principal suivant des ellipses, tangentes, aux deux mêmes points, aux courbes isothermes et à l'intersection (32) des deux ellipsoïdes [*].

Pour construire l'ellipsoïde (31), correspondant à une plaque quelconque, il suffira donc de mener deux plans, conjugués au diamètre commun de l'ellipsoïde principal et de celui des conductibilités linéaires, et de plus tangents à l'intersection de l'ellipsoïde principal par la plaque, puis de faire passer, par les intersections (32) de ces plans et de l'ellipsoïde principal, un ellipsoïde semblable à celui des conductibilités linéaires et semblablement placé.

---

[*] On trouve aisément que les coordonnées x, y, z, de celui des deux points pour lequel on a $S\lambda x > 0$, sont égales aux quotients par $Sa^2f'^2\sqrt{S\lambda^2 a^2}\sin\theta$ des trois expressions $a^2(\lambda S a^2 f'^2 - f' S\lambda a^2 f'), \ldots$, et que la tangente à la courbe (32), menée de gauche à droite à partir de ce point, fait avec les axes des angles ayant leurs cosinus de même signe et dans les mêmes rapports que trois quantités, dont la première est $\mu\frac{z}{c^2} - \nu\frac{y}{b^2} = (\nu g' - \mu h')S\lambda a^2 f'$. La comparaison de celles-ci avec (21 *bis*) fait voir ensuite que, des deux cylindres circonscrits à l'ellipsoïde principal qu'on peut faire passer par l'ellipse isotherme, et dont les génératrices ont leurs directions définies par des cosinus proportionnels aux expressions (21 *bis*) et à celles qu'on en déduirait en changeant les signes de λ, μ, ν, on doit choisir pour cylindre isotherme celui dont la génératrice, menée de bas en haut par rapport à l'observateur considéré au § III, fait le plus petit angle avec la tangente ci-dessus.

Il suit de là qu'en faisant varier θ, l'équation (31) représentera tous les ellipsoïdes homothétiques par rapport à celui des conductibilités linéaires, et qui coupent l'ellipsoïde principal. Les lieux des ellipses isothermes seront les portions de ces ellipsoïdes extérieures à ce dernier, et leur ensemble remplira l'espace compris entre l'ellipsoïde principal et celui des conductibilités linéaires.

§ VIII. — *Courants de chaleur dans les plaques.*

L'équation (28) représente, parmi les cylindres isothermes d'une plaque, celui qui est circonscrit à l'ellipsoïde principal. En cherchant de la même manière le cylindre isotherme circonscrit à l'ellipsoïde $S\frac{x^2}{a^2} = A$, on trouve

$$(33) \qquad S\frac{x^2}{a^2} - \frac{\left(S\frac{a^2f' + \nu g' - \mu h'}{a^2}x\right)^2}{Sa^2f'^2 + S\left(\frac{\nu g' - \mu h'}{a}\right)^2} = A, \quad \text{ou} \quad S\frac{x^2}{a^2} - \frac{H^2}{m} = A,$$

dans laquelle, afin d'abréger, nous représentons par H^2 le numérateur du second terme, et par m le dénominateur, égal à $Sa^2f'^2\left(1 + \frac{S\lambda^2a^2}{a^2b^2c^2}\sin^2\theta\right)$.

Si ψ désigne une certaine fonction, et ψ' sa dérivée par rapport à A, nous aurons

$$(34) \qquad u = \frac{1}{2}\psi(t, A),$$

d'où

$$\frac{du}{dx} = \psi'\left(\frac{x}{a^2} - \frac{a^2f' + \nu g' - \mu h'}{a^2m}H\right),$$
$$\frac{du}{dy} = \psi'\left(\frac{y}{b^2} - \frac{b^2g' + \lambda h' - \nu f'}{b^2m}H\right),$$
$$\frac{du}{dz} = \psi'\left(\frac{z}{c^2} - \frac{c^2h' + \mu f' - \lambda g'}{c^2m}H\right).$$

Ces valeurs, portées dans (9), donnent pour les cosinus f, g, h, qui fixent la direction du courant de chaleur, en un point quelconque

$M(x, y, z)$ (*fig.* 2), trois quantités proportionnelles à des expressions que je représenterai par x_1, y_1, z_1, et dont la première est

$$(35) \qquad x_1 = x - \nu \frac{y}{b^2} + \mu \frac{z}{c^2} - \frac{Ha^2}{m}\left[f'\left(1 + \frac{S\lambda^2 a^2}{a^2 b^2 c^2}\right) - \frac{\lambda S\lambda a^2 f'}{a^2 b^2 c^2}\right].$$

Si le point $M(x, y, z)$ est sur la plaque $Sf'x = 0$, le point M_1, qui a pour coordonnées x_1, y_1, z_1, sera sur la même plaque; car les valeurs de x_1, y_1, z_1, respectivement multipliées par f', g', h', et ajoutées, donneront

$$Sf'x_1 = Sf'\left(-\nu \frac{y}{b^2} + \mu \frac{z}{c^2}\right) - H = Sf'\left(-\nu \frac{y}{b^2} + \mu \frac{z}{c^2}\right) - S\frac{\nu g' - \mu h'}{a^2}x = 0.$$

Cela était d'ailleurs évident, puisque nous savions que la chaleur se répand dans la plaque en ne passant au dehors qu'en très-petite quantité.

Si le point M appartient de plus à l'ellipse isotherme qui est située sur l'ellipsoïde (31), le point M_1 se trouvera sur celui des conductibilités linéaires. En effet, l'expression (35) de x_1 et les expressions pareilles de y_1 et z_1 donnent, en observant que $Sf'^2 = 1$, et que $Sf'x = 0$,

$$\begin{aligned} S\frac{x_1^2}{a^2} = {} & \left(1 + \frac{S\lambda^2 a^2}{a^2 b^2 c^2}\right) S\frac{x^2}{a^2} - \frac{(S\lambda x)^2}{a^2 b^2 c^2} \\ & + \frac{H^2}{m^2}\left[Sa^2 f'^2 \left(1 + \frac{S\lambda^2 a^2}{a^2 b^2 c^2}\right)\left(1 + \frac{S\lambda^2 a^2 \sin^2\theta}{a^2 b^2 c^2}\right) - \frac{(S\lambda a^2 f')^2}{a^2 b^2 c^2}\right] \\ & + \frac{2H}{m}\left(1 + \frac{S\lambda^2 a^2}{a^2 b^2 c^2}\right) Sf'\left(\nu \frac{y}{b^2} - \mu \frac{z}{c^2}\right) + \frac{2HS\lambda x S\lambda a^2 f'}{m a^2 b^2 c^2}, \end{aligned}$$

$$S\lambda x_1 = S\lambda x - \frac{H}{m} S\lambda a^2 f';$$

et, par suite, en observant que $Sf'\left(\nu \frac{y}{b^2} - \mu \frac{z}{c^2}\right) = -H$,

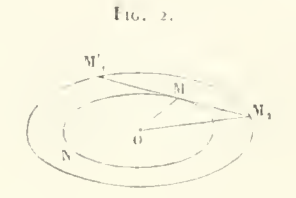
$$S\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{(S\lambda x_1)^2}{a^2 b^2 c^2} = \left(1 + \frac{S\lambda^2 a^2}{a^2 b^2 c^2}\right)\left(S\frac{x^2}{a^2} - \frac{H^2}{m}\right) = 1 + \frac{S\lambda^2 a^2}{a^2 b^2 c^2},$$

d'après (33).

Donc le point $M_1(x_1, y_1, z_1)$ est sur l'ellipse $M_1 M'_1$ d'intersection

de la plaque par l'ellipsoïde des conductibilités linéaires, courbe homothétique par rapport à l'ellipse isotherme MN sur laquelle est le point $M(x, y, z)$.

Fig. 2.



Si λ, μ, ν changent simplement de signe, ces deux ellipses restent les mêmes : mais au même point M correspond, pour point (x_1, y_1, z_1), au lieu de M_1, un autre point M'_1 de la même ellipse. D'ailleurs la relation (35), où H changera de signe, montre que $x_1 - x$, et de même $y_1 - y$ et $z_1 - z$, changent simplement de signe. Donc M'_1 est sur le prolongement de M_1M et à une distance $MM'_1 = M_1M$. Par suite, MM_1 est tangente à l'ellipse MN, et l'on obtiendra M_1, comme au § III, en menant en M la tangente à l'ellipse isotherme, et en prenant l'une des deux intersections de cette tangente avec l'ellipsoïde des conductibilités linéaires.

Il reste à savoir laquelle des deux extrémités de $M_1M'_1$ il faudra choisir. Pour cela, supposant les axes disposés comme au § III, concevons encore le même observateur, qui aurait les pieds à l'origine O, et la tête dans la direction dont les angles avec les axes ont leurs cosinus égaux à $\frac{\lambda a^2}{\sqrt{S\lambda^2 a^4}}$, $\frac{\mu b^2}{\sqrt{S\lambda^2 a^4}}$, $\frac{\nu c^2}{\sqrt{S\lambda^2 a^4}}$; cherchons si cet observateur, tourné vers le point M, verra le point $M_1(x_1, y_1, z_1)$ à sa droite ou à sa gauche.

Il est évident, d'après la continuité de la relation (35), que, si M_1 est, dans une de ses positions, à droite ou à gauche de M, il le sera dans toutes. Or il y a deux positions où il est à droite : c'est lorsque M est à un point de contact de l'ellipse isotherme et de l'intersection (32). En effet, la relation (30) donne alors

$$H^2 = S\left(\frac{\nu g' - \mu h'}{a}\right)^2 S\frac{x^2}{a^2} - \frac{Sa^2 f'^2 (S\lambda x)^2}{a^2 b^2 c^2} = \frac{\left[S\lambda^2 a^2 \sin^2\theta\, S\frac{x^2}{a^2} - (S\lambda x)^2\right] Sa^2 f'^2}{a^2 b^2 c^2} = 0,$$

et, par suite, les expressions de x_1, y_1, z_1 sont les mêmes que dans les formules (16) du § III, formules d'où nous avons déduit que M_1 est à droite de M.

La droite OM_1 fournissant la direction de la tangente en M au courant de chaleur qui passe par ce point, on en déduira, comme au § III, que les courants de chaleur sont des spirales ayant l'origine pour pôle et pour point asymptote, et qui s'écartent de ce point en tournant de gauche à droite. Toutes ces spirales sont parallèles aux points où elles rencontrent un même rayon émané de l'origine; la direction de leurs tangentes en ces points s'obtient en menant de gauche à droite, à l'intersection du rayon considéré et de l'ellipse isotherme MN, une tangente à cette ellipse, jusqu'à sa rencontre avec l'ellipsoïde des conductibilités linéaires, et en joignant l'origine des coordonnées à l'extrémité de cette tangente. Les spirales couperont tous les rayons sous un même angle et seront logarithmiques, alors et alors seulement que l'ellipse sera un cercle. Elles se réduiront à des lignes droites pour toutes les plaques menées suivant le diamètre commun des deux ellipsoïdes principal et des conductibilités linéaires, car alors les deux ellipses MN, $M_1M'_1$ se confondront.

La grandeur du courant sera, comme au § III, exprimée par $-\psi'\sqrt{Sx_1^2}$, et proportionnelle, aux divers points d'une même ellipse isotherme, au rayon OM_1 de l'ellipsoïde des conductibilités linéaires qui correspond au rayon OM sur lequel on mesure le courant [*].

---

[*] On arriverait encore aux résultats de ce paragraphe, et plus simplement, en observant que la *fig.* 1 (§ III) permet de construire, d'après les raisonnements mêmes faits pour l'établir, la direction du courant qui passe à l'époque t en un point quelconque O d'un milieu, lorsqu'on connaît celle de la surface isotherme menée en ce point. Si, de ce point O comme centre, on décrit l'ellipsoïde principal et celui des conductibilités linéaires, puis qu'on mène au premier, du côté où va le courant, un plan tangent parallèle à l'élément isotherme donné, et, par le point de contact M, un autre plan conjugué au diamètre commun des deux surfaces, le courant sera dirigé, à partir de O, vers l'intersection M_1, prise à droite de M, de ce plan, du plan tangent et du second ellipsoïde.

On déduira de là, dans le cas d'une plaque, la construction de la *fig.* 2, en se rappelant les cylindres isothermes du § VI et le parallélisme des courants aux faces de la plaque.

Extrait d'une Lettre adressée à M. Besge;

Par M. J. LIOUVILLE.

« .... Que la valeur de l'intégrale définie

$$\int_0^1 \frac{\text{arc tang} x\, dx}{1+x}$$

ait été ou non donnée déjà, je vous ferai observer qu'on la déduit immédiatement de l'équation

$$\int_0^1 \frac{\log(1+x)\, dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{8}\log(2)$$

démontrée par M. Bertrand, puis de la manière la plus simple par M. Serret. (*Voir* à la fin du tome IX, 1[re] série.)

» En effet, une intégration par parties nous conduit d'abord à

$$\int \frac{\text{arc tang} x\, dx}{1+x} = \text{arc tang} x \log(1+x) - \int \frac{\log(1+x)\, dx}{1+x^2}.$$

Passez des intégrales indéfinies aux intégrales définies, en tenant compte de l'équation citée, et vous verrez tout de suite que l'on a aussi

$$\int_0^1 \frac{\text{arc tang} x\, dx}{1+x} = \frac{\pi}{8}\log(2);$$

ce qu'il fallait obtenir.

» Je pourrais au moyen des intégrales définies dont je viens de vous parler en trouver beaucoup d'autres dont les valeurs seraient tout aussi simples; mais j'aime mieux passer à un autre sujet, et vous dire quelques mots à propos d'une Note sur les *formes quadratiques*

proprement primitives, dont le déterminant changé de signe est > 0 *et* $\equiv 3$ (*mod.* 8), que j'ai insérée au tome XI (2e série). Voici effectivement deux théorèmes assez curieux que l'on peut ajouter à ceux dont j'ai parlé dans cette Note.

» Supposant l'entier positif $k \equiv 3 \pmod{8}$, on considère l'une après l'autre les formes quadratiques de déterminant $-k$ dont il est question à l'endroit cité, et pour chacune d'elles on cherche les deux plus petits entiers impairs a, a', qu'elle exprime proprement, a' étant $> a$, puis on calcule pour l'ensemble de ces formes les deux sommes

$$\sum a, \quad \sum a',$$

et aussi les deux sommes relatives aux carrés de a et de a', savoir :

$$\sum a^2, \quad \sum a'^2.$$

» Or je trouve que l'on a d'une part

$$\sum a' = 3 \sum a,$$

et d'autre part

$$\sum a'^2 = 9 \sum a^2.$$

Ces deux équations me semblent mériter qu'on les indique. Elles subsisteraient évidemment, du reste, si, au lieu de ne considérer que les classes de formes proprement primitives, on considérait la totalité des formes impaires, distinctes, de déterminant $-k$.

» Vous les vérifierez facilement sur des exemples. Ainsi pour

$$k = 3,$$

la vérification est immédiate, car on n'a alors pour a, a' que le seul système de valeurs

$$a = 1, \quad a' = 3.$$

Pour

$$k = 11,$$

on a ces trois systèmes

$$a = 1, \quad a' = 11; \quad a = 3, \quad a' = 5; \quad a = 3, \quad a' = 5;$$

d'où

$$\sum a = 1 + 3 + 3 = 7,$$

puis

$$\sum a' = 11 + 5 + 5 = 21,$$

valeur triple de la précédente. D'un autre côté,

$$\sum a^2 = 1 + 9 + 9 = 19$$

et

$$\sum a'^2 = 121 + 25 + 25 = 171;$$

or on a bien

$$171 = 9 \cdot 19.$$

Il vous sera facile de continuer, si l'envie vous en prend, ces vérifications numériques.

» En terminant, je reviens aux intégrales définies et je considère en particulier les deux suivantes :

$$\int_0^\infty f\left(\frac{x}{a} + \frac{a}{x}\right) \log x \frac{dx}{x}$$

et

$$\int_0^\infty f\left(\frac{x}{a} + \frac{a}{x}\right) \frac{dx}{x},$$

que je désignerai respectivement par P et Q; a est une constante positive, et la fonction (arbitraire, d'ailleurs) représentée par le signe f est, bien entendu, supposée telle que nos deux intégrales aient une valeur finie et un sens précis.

» Cela étant, je trouve entre les deux intégrales nommées P, Q

une relation fort simple et peut-être, au surplus, déjà remarquée. On a, en effet,

$$P = Q \log a.$$

La démonstration est facile.

» Je vous engage à appliquer l'équation que je viens d'écrire à des exemples où la valeur de Q soit connue et par conséquent fournisse celle de P. Vous arriverez de la sorte à des résultats intéressants.

» J'espère pouvoir vous communiquer prochainement d'autres théorèmes nouveaux et, je crois, dignes aussi d'attention, concernant d'autres classes d'intégrales définies. »

Théorème concernant la fonction numérique $\rho_2(n)$;

Par M. J. LIOUVILLE.

L'entier que nous désignons par n sera toujours impair, et si on le décompose de toutes les manières possibles en un produit

$$d\delta$$

de deux facteurs, on aura, d'après une notation souvent employée par nous,

$$\rho_2(n) = \sum (-1)^{\frac{\delta - 1}{2}} d^2.$$

Ajoutons que, dans le présent article, n ne pourra être que de la forme linéaire

$$4l + 3,$$

en sorte que les valeurs de n seront prises dans la suite

$$3,\ 7,\ 11,\ 15, \ldots;$$

à ces valeurs répondront, comme on peut s'en assurer par un calcul très-simple, les valeurs de $\rho_2(n)$ ci-après

$$8,\ 48,\ 120,\ 208, \ldots,$$

dont nous avons eu déjà occasion de faire usage.

Maintenant, soit

$$m$$

un entier donné $\equiv 7 \pmod{8}$, c'est-à-dire de la forme linéaire

$$8k + 7.$$

Retranchons-en les carrés des entiers impairs successifs

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ldots,\ i,\ldots,$$

en ayant soin de nous arrêter au moment où le carré

$$i^2$$

surpasserait l'entier m, auquel il ne peut jamais être égal; puis formons la somme

$$\text{(A)} \qquad \sum (m - 7i^2)\,\rho_2\left(\frac{m - i^2}{2}\right),$$

pour toutes les valeurs indiquées de i. Dans les conditions où nous nous sommes placés,

$$\frac{m - i^2}{2}$$

sera toujours un nombre entier $\equiv 3 \pmod{4}$ et rentrant par conséquent dans la série des nombres n écrite plus haut.

Cela posé, le théorème que nous voulons donner ici consiste en ce que la somme (A) est toujours nulle. Il s'exprime donc par l'équation

$$\text{(B)} \qquad \sum (m - 7i^2)\,\rho_2\left(\frac{m - i^2}{2}\right) = 0,$$

que nous sommes parvenus à démontrer de plusieurs manières, mais que nous nous bornerons pour le moment à vérifier numériquement sur les deux exemples les plus simples.

Les valeurs de m pour lesquelles l'équation (B) a lieu sont celles des divers termes de la progression arithmétique

$$7,\ 15,\ 23,\ 31,\ldots$$

dont le terme général est

$$8k+7.$$

Or, pour

$$m=7,$$

l'équation (B) est purement identique, le premier membre de cette équation se réduisant à un seul terme qui est nul de lui-même. Pour

$$m=15,$$

elle fournit

$$(15-7.1)\rho_2\left(\frac{15-1}{2}\right)+(15-7.9)\rho_2\left(\frac{15-9}{2}\right)=0,$$

c'est-à-dire

$$8\rho_2(7)-48\rho_2(3)=0;$$

ce qui est exact, puisque l'on a, comme on l'a vu plus haut

$$\rho_2(3)=8,\quad \rho_2(7)=48.$$

Il serait inutile de pousser plus loin ces calculs.

Notes sur le Problème des trois corps;

Par M. A. WEILER.

(*Astronomische Nachrichten*, t. LXXIV. — Traduction de M. Puiseux.)

I. — *Sur l'élimination des nœuds dans le Problème des trois corps.*

Lorsque dans le Problème des trois corps on cherche le mouvement relatif de deux des masses autour de la troisième, on trouve, pour déterminer ce mouvement, un système de six équations différentielles du second ordre; ces équations n'ont plus la forme canonique. Mais Jacobi a montré qu'on obtient un autre système d'équations ayant cette forme, lorsque à la place des coordonnées rectangulaires on introduit, comme nouvelles coordonnées, de certaines fonctions linéaires des coordonnées primitives. Ce nouveau système se prête plus facilement à l'intégration et il présente en particulier cette circonstance que, quand on l'a réduit, à l'aide des quatre intégrales finies connues, à un système d'équations différentielles du huitième ordre, ce dernier peut lui-même être ramené à un système du septième ordre et à une quadrature. On serait conduit par là à penser que cette réduction à un système du septième ordre est intimement liée à la forme canonique du système auquel on parvient par la transformation linéaire. Le but de la présente communication est de montrer qu'il n'en est pas ainsi et que cette réduction peut être opérée, soit sur les équations différentielles primitives, soit sur celles qu'on en déduit par une transformation linéaire quelconque ne conduisant pas à un système canonique. Elle n'est en réalité qu'un résultat de la transformation en coordonnées polaires. L'introduction de ces coordonnées donnant lieu à des calculs un peu pénibles, je me bornerai ici à transcrire les résultats auxquels elle conduit.

La transformation linéaire conduit au système canonique

$$(\mathrm{A})\qquad \begin{cases} \xi'' = \dfrac{d\mathrm{U}}{d\xi}, & \xi''_1 = \dfrac{d\mathrm{U}}{d\xi_1}, \\ \eta'' = \dfrac{d\mathrm{U}}{d\eta}, & \eta''_1 = \dfrac{d\mathrm{U}}{d\eta_1}, \\ \zeta'' = \dfrac{d\mathrm{U}}{d\zeta}, & \zeta''_1 = \dfrac{d\mathrm{U}}{d\zeta_1}. \end{cases}$$

J'applique maintenant les formules de transformation linéaires

$$\begin{aligned} \xi &= x\cos\alpha + x_1\sin\alpha_1, & \xi_1 &= x_1\cos\alpha_1 + x\sin\alpha, \\ \eta &= y\cos\alpha + y_1\sin\alpha_1, & \eta_1 &= y_1\cos\alpha_1 + y\sin\alpha, \\ \zeta &= z\cos\alpha + z_1\sin\alpha_1, & \zeta_1 &= z_1\cos\alpha_1 + z\sin\alpha, \end{aligned}$$

où α et α_1 sont des constantes indéterminées. Dans le cas de $\alpha + \alpha_1 = 0$, on obtient un système canonique; mais le système cesse d'être canonique si cette condition n'est pas remplie. On trouve

$$\begin{aligned} x''\cos^2\sigma &= \frac{d\mathrm{U}}{dx} - \sin\sigma\frac{d\mathrm{U}}{dx_1}, & x''_1\cos^2\sigma &= \frac{d\mathrm{U}}{dx_1} - \sin\sigma\frac{d\mathrm{U}}{dx}, \\ y''\cos^2\sigma &= \frac{d\mathrm{U}}{dy} - \sin\sigma\frac{d\mathrm{U}}{dy_1}, & y''_1\cos^2\sigma &= \frac{d\mathrm{U}}{dy_1} - \sin\sigma\frac{d\mathrm{U}}{dy}, \\ z''\cos^2\sigma &= \frac{d\mathrm{U}}{dz} - \sin\sigma\frac{d\mathrm{U}}{dz_1}; & z''_1\cos^2\sigma &= \frac{d\mathrm{U}}{dz_1} - \sin\sigma\frac{d\mathrm{U}}{dz}, \end{aligned}$$

où l'on a fait, pour abréger, $\alpha + \alpha_1 = \sigma$. En attribuant à α et à α_1 des valeurs convenablement choisies, on retrouve le système des équations différentielles primitives d'où a été déduit le système (A).

Dans les équations différentielles ainsi transformées, introduisons maintenant les coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} \frac{x}{r} &= \cos\theta\cos u - \cos i\sin\theta\sin u, & \frac{x_1}{r_1} &= \cos\theta_1\cos u_1 - \cos i_1\sin\theta_1\sin u_1, \\ \frac{y}{r} &= \sin\theta\cos u + \cos i\cos\theta\sin u, & \frac{y_1}{r_1} &= \sin\theta_1\cos u_1 + \cos i_1\cos\theta_1\sin u_1, \\ \frac{z}{r} &= \sin i\sin u, & \frac{z_1}{r_1} &= \sin i_1\sin u_1, \end{aligned}$$

où θ, i, θ_1, i_1 sont considérées comme variables.

La condition que la dérivée de chaque second membre conserve la même forme que si θ et i étaient des constantes conduit, comme on sait, aux équations

(1) $$i' = \sin i \cot u \theta',$$

(2) $$i'_1 = \sin i_1 \cot u_1 \theta'_1,$$

(3) $$u' + \cos i\, \theta' = \frac{n}{r^2},$$

(4) $$u'_1 + \cos i_1\, \theta'_1 = \frac{n_1}{r_1^2}.$$

où n et n_1 sont également des quantités variables.

Soit s le cosinus de l'angle que forment entre eux les rayons vecteurs r et r_1. Soit, de plus, J l'angle dièdre des plans des deux orbites et soient v, v_1 les angles que l'intersection commune de ces plans fait avec les deux nœuds. On a l'équation

$$s = \cos(u - v)\cos(u_1 - v_1) + \cos J \sin(u - v)\sin(u_1 - v_1).$$

L'intégrale des forces vives peut se mettre sous la forme

(5) $$\left\{\begin{aligned} & r'^2 + r'^2_1 + \frac{n^2}{r^2} + \frac{n_1^2}{r_1^2} \\ & \quad + 2\sin\sigma\left(\frac{d^2 s}{du\,du_1}\frac{nn_1}{rr_1} + \frac{ds}{du}\frac{n}{r}r'_1 + \frac{ds}{du_1}\frac{n_1}{r_1}r' + s r' r'_1\right) = 2U - a, \end{aligned}\right.$$

où U représente une fonction des variables r, r_1, s et a une constante arbitraire.

Des trois intégrales des aires, il y en a une qui contient la dérivée $\left(\frac{r}{r_1}\right)'$, savoir :

(6) $$\sin\sigma\left(\frac{r'}{r} - \frac{r'_1}{r_1} + \frac{n}{r^2}\cot u - \frac{n_1}{r_1^2}\cot u_1\right) + \frac{nn_1 \sin\Theta \cos^2\sigma}{crr_1 \sin u \sin u_1} = 0,$$

où l'on a fait, pour abréger, $\theta - \theta_1 = \Theta$. Les deux autres intégrales

des aires ne contiennent que des quantités finies. Elles sont :

$$(7)\qquad n\sin(u_1-v_1)+\frac{r}{r_1}\sin\sigma\, n_1\sin(u-v)+c\sin u_1\frac{\sin v}{\sin\Theta}=0,$$

$$(8)\qquad n_1\sin(u-v)+\frac{r_1}{r}\sin\sigma\, n\sin(u_1-v_1)-c\sin u\frac{\sin v_1}{\sin\Theta}=0.$$

La quantité c est une des trois constantes arbitraires de ces intégrales. On a fait disparaître les deux autres en attribuant aux axes des coordonnées une position déterminée.

On a de plus l'équation différentielle du second ordre

$$(9)\qquad \frac{1}{2}(r^2+2rr_1s\sin\sigma+r_1^2)''=\mathrm{U}-a,$$

et enfin les deux équations des perturbations

$$(10)\qquad \frac{n\sin i\,\theta'\cos^2\sigma}{\sin\mathrm{J}\sin u\sin(u_1-v_1)}=-\frac{d\mathrm{U}}{ds}+r\sin\sigma\left(\frac{d\mathrm{U}}{dr_1}-\frac{s}{r_1}\frac{d\mathrm{U}}{ds}\right),$$

$$(11)\qquad \frac{n_1\sin i_1\,\theta'_1\cos^2\sigma}{\sin\mathrm{J}\sin u_1\sin(u-v)}=\frac{d\mathrm{U}}{ds}-r_1\sin\sigma\left(\frac{d\mathrm{U}}{dr}-\frac{s}{r}\frac{d\mathrm{U}}{ds}\right).$$

Telles sont les équations du problème quand on a remplacé les coordonnées rectangulaires x, y, z, x_1, y_1, z_1 par les coordonnées polaires. On voit que les nœuds θ et θ_1 n'y figurent que dans la combinaison $\theta-\theta_1=\Theta$. Il y a en effet un triangle sphérique à l'aide duquel on peut exprimer les angles J, v, v_1 au moyen de i, i_1, Θ. Si l'on élimine encore les variables u, u_1 et Θ au moyen des trois intégrales des aires (6), (7), (8) et les dérivées θ', θ'_1 à l'aide des équations (10) et (11), on obtient un système d'équations différentielles du septième ordre formé des équations (1), (2), (3), (4), (5), (9) et déterminant les variables i, i_1, u, u_1, r, r_1. La variable θ se détermine à la fin par une quadrature en vertu de l'équation (10).

II. — *Sur les intégrales des aires dans le Problème des trois corps.*

Lorsque dans le Problème des trois corps on rapporte à l'une des masses les mouvements des deux autres, on obtient immédiatement un

système de six équations différentielles du second ordre qu'il s'agit d'intégrer. Par une transformation linéaire des coordonnées rectangulaires, on donne au système la forme canonique; la forme plus simple de ce nouveau système est déjà une raison de le prendre pour point de départ de toutes les recherches ultérieures.

Jacobi, en s'attachant à mettre en évidence les avantages du système canonique, insiste particulièrement sur deux points. Les intégrales des aires y acquièrent une forme remarquable, et il en résulte que l'intersection mutuelle des plans des deux orbites se déplace dans un plan fixe. C'est là un des avantages que Jacobi fait ressortir. En outre, ces intégrales des aires fournissent deux équations simples entre les inclinaisons i et i_1 des plans des deux orbites sur ce plan fixe et les vitesses aréolaires n et n_1 des deux rayons vecteurs. Si l'on considère un côté d'un triangle plan comme une constante arbitraire et que i et i_1 soient les angles adjacents, alors n et n_1 seront les deux autres côtés.

On pourrait croire que cette forme simple des intégrales des aires dépend essentiellement de la forme canonique du système. Je me propose de montrer dans ce qui va suivre qu'il n'en est point ainsi. On peut assigner en effet d'autres transformations linéaires des coordonnées rectangulaires qui ne conduisent plus à un système canonique et qui entraînent cependant, pour les intégrales des aires, la même forme que dans le cas du système canonique.

Je pars encore du système canonique

$$(\mathrm{A})\qquad \begin{cases} \xi'' = \dfrac{d\mathrm{U}}{d\xi}, & \xi''_1 = \dfrac{d\mathrm{U}}{d\xi_1}, \\ \eta'' = \dfrac{d\mathrm{U}}{d\eta}, & \eta''_1 = \dfrac{d\mathrm{U}}{d\eta_1}, \\ \zeta'' = \dfrac{d\mathrm{U}}{d\zeta}, & \zeta''_1 = \dfrac{d\mathrm{U}}{d\zeta_1}, \end{cases}$$

et je les tranforme cette fois au moyen des équations linéaires

$$\begin{aligned} \xi &= x\cos\varepsilon - x_1\sin\varepsilon, & \xi_1 &= x_1\cos\varepsilon + x\sin\varepsilon, \\ \eta &= y\cos\varepsilon - y_1\sin\varepsilon, & \eta_1 &= y_1\cos\varepsilon + y\sin\varepsilon, \\ \zeta &= z\cos\varepsilon - z_1\sin\varepsilon, & \zeta_1 &= z_1\cos\varepsilon + z\sin\varepsilon, \end{aligned}$$

où ε est une fonction indéterminée du temps. On trouve pour les équations différentielles transformées

$$
(\mathrm{B})\quad\left\{
\begin{aligned}
x'' &= x\varepsilon'^2 + x_1\varepsilon'' + 2x'_1\varepsilon' + \frac{d\mathrm{U}}{dx}, & x''_1 &= x_1\varepsilon'^2 - x\varepsilon'' - 2x'\varepsilon' + \frac{d\mathrm{U}}{dx_1},\\
y'' &= y\varepsilon'^2 + y_1\varepsilon'' + 2y'_1\varepsilon' + \frac{d\mathrm{U}}{dy}, & y''_1 &= y_1\varepsilon'^2 - y\varepsilon'' - 2y'\varepsilon' + \frac{d\mathrm{U}}{dy_1},\\
z'' &= z\varepsilon'^2 + z_1\varepsilon'' + 2z'_1\varepsilon' + \frac{d\mathrm{U}}{dz}, & z''_1 &= z_1\varepsilon'^2 - z\varepsilon'' - 2z'\varepsilon' + \frac{d\mathrm{U}}{dz_1},
\end{aligned}\right.
$$

c'est-à-dire un système qui n'a plus la forme canonique, à moins qu'on ne suppose $\varepsilon' = 0$. Introduisons maintenant les coordonnées polaires :

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{r} &= \cos\theta\cos u - \cos i \sin\theta \sin u, & \frac{x_1}{r_1} &= \cos\theta_1\cos u_1 - \cos i_1 \sin\theta_1 \sin u_1,\\
\frac{y}{r} &= \sin\theta\cos u + \cos i \cos\theta \sin u, & \frac{y_1}{r_1} &= \sin\theta_1\cos u_1 + \cos i_1 \cos\theta_1 \sin u_1,\\
\frac{z}{r} &= \sin i \sin u, & \frac{z_1}{r_1} &= \sin i_1 \sin u_1,
\end{aligned}
$$

où θ, i, θ_1, i_1 sont considérées comme variables.

On voit que les équations différentielles qui représentent le mouvement de l'un des corps se déduisent des équations différentielles correspondantes au mouvement de l'autre en échangeant les lettres marquées d'un indice avec celles qui ne le sont pas et en remplaçant ε par $-\varepsilon$. Il suffira donc d'effectuer pour l'un des deux corps le calcul dont il s'agit.

Je remplace les trois équations différentielles (B) par les suivantes :

$$
(\mathrm{C})\quad\left\{
\begin{aligned}
&[yz' - zy' - (yz_1 - zy_1)\varepsilon']'\\
&\qquad = (yz'_1 - zy'_1 + y_1z' - z_1y')\varepsilon' + y\frac{d\mathrm{U}}{dz} - z\frac{d\mathrm{U}}{dy},\\
&[xz' - zx' - (xz_1 - zx_1)\varepsilon']'\\
&\qquad = (xz'_1 - zx'_1 + x_1z' - z_1x')\varepsilon' + x\frac{d\mathrm{U}}{dz} - z\frac{d\mathrm{U}}{dx},\\
&[xy' - yx' - (xy_1 - yx_1)\varepsilon']'\\
&\qquad = (xy'_1 - yx'_1 + x_1y' - y_1x')\varepsilon' + x\frac{d\mathrm{U}}{dy} - y\frac{d\mathrm{U}}{dx}.
\end{aligned}\right.
$$

Maintenant, comme à la place des trois coordonnées x, y, z on introduit les quatre variables r, u, θ, i, on a une variable surnuméraire dont on peut disposer arbitrairement. En faisant, pour abréger, $\frac{dx}{du} = x_u$, j'écrirai les équations suivantes :

$$(\mathrm{D})\qquad \left\{\begin{aligned} \left(\frac{x}{r}\right)' &= \left(\frac{x}{r}\right)_u \frac{n}{r^2} + \frac{x_1 r - x r_1 s}{r^2}\,\varepsilon', \\ \left(\frac{y}{r}\right)' &= \left(\frac{y}{r}\right)_u \frac{n}{r^2} + \frac{y_1 r - y r_1 s}{r^2}\,\varepsilon', \\ \left(\frac{z}{r}\right)' &= \left(\frac{z}{r}\right)_u \frac{n}{r^2} + \frac{z_1 r - z r_1 s}{r^2}\,\varepsilon'. \end{aligned}\right.$$

Chacune d'elles est une conséquence des deux autres en vertu des deux équations identiques

$$\frac{x}{r}\left(\frac{x}{r}\right)' + \frac{y}{r}\left(\frac{y}{r}\right)' + \frac{z}{r}\left(\frac{z}{r}\right)' = 0, \quad \frac{x}{r}\left(\frac{x}{r}\right)_u + \frac{y}{r}\left(\frac{y}{r}\right)_u + \frac{z}{r}\left(\frac{z}{r}\right)_u = 0.$$

Ces mêmes équations ajoutent aux variables r, u, θ, i une cinquième variable; ainsi rien ne s'oppose à ce qu'on les admette. Par là se trouve déterminée, en outre de u, cette variable surnuméraire qui doit être introduite à la place des coordonnées rectangulaires x, y, z dans les équations différentielles du mouvement.

On peut d'ailleurs mettre encore les équations (D) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} yz' - zy' - (yz_1 - zy_1)\,\varepsilon' &= n \sin i \sin\theta, \\ xz' - zx' - (xz_1 - zx_1)\,\varepsilon' &= n \sin i \cos\theta, \\ xy' - yx' - (xy_1 - yx_1)\,\varepsilon' &= n \cos i. \end{aligned}$$

En ayant égard à ce qui précède, les équations (C) deviennent

$$(\mathrm{E})\qquad \left\{\begin{aligned} (n \sin i \sin\theta)' &= (yz'_1 - zy'_1 + y_1 z' - z_1 y')\,\varepsilon' + \frac{yz_1 - zy_1}{rr_1}\frac{d\mathrm{U}}{ds}, \\ (n \sin i \cos\theta)' &= (xz'_1 - zx'_1 + x_1 z' - z_1 x')\,\varepsilon' + \frac{xz_1 - zx_1}{rr_1}\frac{d\mathrm{U}}{ds}, \\ (n \cos i)' &= (xy'_1 - yx'_1 + x_1 y' - y_1 x')\,\varepsilon' + \frac{xy_1 - yx_1}{rr_1}\frac{d\mathrm{U}}{ds}. \end{aligned}\right.$$

En prenant à la place des équations (D) trois autres équations (D_1) qui se déduisent des premières par l'échange des lettres marquées d'un indice avec les lettres non marquées, et par le changement de ε en $-\varepsilon$, on obtient, pour l'autre mobile, trois équations pareilles (E_1). En réunissant ensemble les équations (E) et (E_1), on obtient les intégrales des aires

$$n \sin i \sin\theta + n_1 \sin i_1 \sin\theta_1 = 0,$$
$$n \sin i \cos\theta + n_1 \sin i_1 \cos\theta_1 = 0,$$
$$n \cos i + n_1 \sin i_1 - c = 0,$$

qui peuvent se mettre sous cette forme simple :

$$(1) \qquad \theta = \theta_1,$$

$$(2) \qquad n_1 \sin(i - i_1) = c \sin i,$$

$$(3) \qquad n \sin(i_1 - i) = c \sin i_1.$$

Pour exprimer à l'aide des coordonnées polaires l'intégrale des forces vives, on peut partir de la forme primitive :

$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 + \xi_1'^2 + \eta_1'^2 + \zeta_1'^2 = 2U - a.$$

On trouve, par la transformation écrite ci-dessus, la nouvelle forme

$$r_0'^2 + r_{01}'^2 + \frac{n^2}{r^2} + \frac{n_1^2}{r_1^2} = 2U - a,$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$r' - r_1 s \varepsilon' = r'_0, \quad r'_1 + r s \varepsilon' = r'_{01}.$$

Dans ces formules s désigne le cosinus de l'angle compris entre les rayons vecteurs r et r_1 et se détermine par la formule

$$s = \cos u \cos u_1 + \cos(i - i_1) \sin u \sin u_1.$$

Des équations (E) se tirent les dérivées des éléments θ, i, n. On

trouve les valeurs suivantes :

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{nn_1}{c}\theta' &= \left(\cos u \sin u_1 \frac{nr_1}{r} - \cos u_1 \sin u \frac{n_1 r}{r_1}\right)\varepsilon' \\ &\quad + \sin u \sin u_1 \left[(r_1 r'_0 - r r'_{01})\varepsilon' - \frac{dU}{ds}\right], \end{aligned}\right.$$

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{nn_1}{c}\frac{i'}{\sin i} &= -\left(\sin u \sin u_1 \frac{nr_1}{r} + \cos u \cos u_1 \frac{n_1 r}{r_1}\right)\varepsilon' \\ &\quad + \cos u \sin u_1 \left[(r_1 r'_0 - r r'_{01})\varepsilon' - \frac{dU}{ds}\right], \end{aligned}\right.$$

$$(7)\qquad n' = \left(s\frac{nr_1}{r} + \frac{d^2 s}{du\,du_1}\frac{n_1 r}{r_1}\right)\varepsilon' - \frac{ds}{du}\left[(r_1 r'_0 - r r'_{01})\varepsilon' - \frac{dU}{ds}\right].$$

A l'aide des équations (D), on obtient aussi la dérivée de u. On trouve

$$(8)\qquad u' + \cos i\,\theta' = \frac{n}{r^2} + \frac{ds}{du}\frac{r_1}{r}\varepsilon'.$$

Il reste encore à former l'équation différentielle qui détermine le rayon vecteur. En partant de la relation $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, on trouve par une double différentiation

$$(9)\quad rr'' + r'^2 = (r^2 - r_1^2)\varepsilon'^2 + rr_1 s\varepsilon'' + 2(rr_1 s)'\varepsilon' + r_0'^2 + \frac{n^2}{r^2} + r\frac{dU}{dr}.$$

J'ai ainsi exprimé en coordonnées polaires les équations différentielles du mouvement, dans la supposition que ε est une fonction indéterminée du temps. Les équations (5), (6), (7), (8), (9) forment un système du sixième ordre qui, pour $\varepsilon' = 0$, se réduit au système connu. Les intégrales des aires (1), (2), (3) ont, comme dans le cas de $\varepsilon' = 0$, cette forme simple qui se prête commodément à l'élimination des variables qu'elles contiennent. On disposera arbitrairement de la fonction ε; il y aurait lieu d'examiner si cette fonction peut être employée avantageusement dans la théorie des perturbations.

III. — *Sur une transformation des équations différentielles du mouvement dans le Problème des trois corps.*

Le Problème des trois corps peut se ramener à un système d'équations différentielles du sixième ordre. On a d'abord le système connu du huitième ordre

$$(\text{A})\quad \begin{cases} u' = \dfrac{ds}{du}\dfrac{d\text{U}}{ds}, & u'_1 = \dfrac{ds}{du_1}\dfrac{d\text{U}}{ds}, \\ u' + \cos i\,\theta' = \dfrac{n}{r^2}, & u' + \cos i_1\,\theta' = \dfrac{n_1}{r_1^2}, \\ rr'' = \dfrac{n^2}{r^2} + r\dfrac{d\text{U}}{dr}, & r_1 r''_1 = \dfrac{n_1^2}{r_1^2} + r_1\dfrac{d\text{U}}{dr_1}, \end{cases}$$

où l'on doit éliminer les inclinaisons i et i_1 des plans des orbites sur le plan invariable à l'aide des intégrales des aires, et la dérivée θ' au moyen de l'équation

$$\frac{nn_1}{c}\theta' = -\sin u \sin u_1 \frac{d\text{U}}{ds}.$$

Comme l'intégrale des forces vives

$$r'^2 + r_1'^2 + \frac{n^2}{r^2} + \frac{n_1^2}{r_1^2} = 2\text{U} - a$$

satisfait au système précédent et que d'ailleurs la variable indépendante t ne figure pas dans les équations différentielles, le problème se trouve ramené à l'intégration d'un système du sixième ordre.

Le système du huitième ordre qui précède répond en même temps à la forme proposée par Hamilton, ainsi que M. Radau l'a montré récemment. On trouve en effet que si l'on met l'intégrale des forces vives sous la forme $\text{H} = -a$, il est identique au système

d'Hamilton

$$\frac{du}{dt} = \frac{dH}{dn}, \quad \frac{dn}{dt} = -\frac{dH}{du},$$
$$\frac{du_1}{dt} = \frac{dH}{dn_1}, \quad \frac{dn_1}{dt} = -\frac{dH}{du_1},$$
$$\frac{dr}{dt} = \frac{dH}{dr'}, \quad \frac{dr'}{dt} = -\frac{dH}{dr},$$
$$\frac{dr_1}{dt} = \frac{dH}{dr'_1}, \quad \frac{dr'_1}{dt} = -\frac{dH}{dr_1}.$$

On ne peut admettre qu'en outre de l'intégrale des forces vives, il se trouve une autre intégrale du système précédent qui puisse, à l'aide des quadratures, se mettre sous forme finie. La chose serait moins claire, si par l'introduction de nouvelles variables on parvenait à transformer le système en un autre contenant moins de sept variables. Un nouveau système, que je vais faire connaître dans ce qui suit, est peut-être propre à donner quelque ouverture à ce sujet.

Au point où l'on est arrivé dans cette question, il y a, dans le système (A), une circonstance qui paraît gênante. Des huit variables de ce système, six figurent sous les radicaux de la fonction des forces. On a en effet

$$U = \frac{\varkappa m\sqrt{\frac{m}{1+m}}}{r} + \frac{\varkappa m m_1\sqrt{\frac{m m_1}{m+m_1}}}{\sqrt{r_1^2\sin^2\mu - 2rr_1 s\sin\mu\cos\mu + r^2\cos^2\mu}}$$
$$+ \frac{\varkappa m_1\sqrt{\frac{m_1}{1+m_1}}}{\sqrt{r_1^2\cos^2\mu_0 + 2rr_1 s\cos\mu_0\sin\mu_0 + r^2\sin^2\mu_0}},$$

où m et m_1 sont les rapports des masses des deux mobiles à la masse du corps central et où les angles μ et μ_0 dépendent seulement de m et de m_1; ils sont donnés par les formules

$$\sin\mu = \sqrt{\frac{m(1+m+m_1)}{(m+m_1)(1+m)}}, \quad \cos\mu_0 = \sqrt{\frac{1+m+m_1}{(1+m)(1+m_1)}}.$$

La quantité s est le cosinus de l'angle des deux rayons vecteurs.

On a

$$s = \cos u \cos u_1 + \cos J \sin u \sin u_1,$$

et pour l'élimination de J, on a l'intégrale des aires

$$n^2 + 2nn_1 \cos J + n_1^2 = c^2.$$

Sous les radicaux figurent dans les six variables r, r_1, u, u_1, n, n_1. Mais comme il est possible de choisir les variables du problème de façon que deux d'entre elles seulement figurent sous les radicaux, on pourrait faire au système (A) le reproche que les variables y sont trop mêlées.

J'introduis, au lieu de r et de r_1, deux nouvelles variables en posant

$$r^2 + r_1^2 = \rho^2, \quad \frac{r}{r_1} = \operatorname{tang}\frac{\psi}{2}.$$

Pour faciliter la transformation, j'écris l'intégrale des forces vives sous la forme

$$(rr' + r_1 r_1')^2 + (r_1 r' - r r_1')^2 + n^2 + n_1^2 + \frac{n^2 r_1^2}{r^2} + \frac{n_1^2 r^2}{r_1^2} = \rho^2(2U - a),$$

qui, en vertu de l'intégrale des aires déjà citée, se ramène à celle-ci :

$$(\rho\rho')^2 + \left(\rho^2 \frac{\psi'}{2}\right)^2 + \left(\frac{n r_1}{r}\right)^2 + \left(\frac{n_1 r}{r_1}\right)^2 - 2nn_1 \cos J + c^2 = \rho^2(2U - a).$$

On a les équations identiques

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 + \sin^2 J \sin^2 u_1 = 1 - s^2,$$

$$\left(\frac{ds}{du_1}\right)^2 + \sin^2 J \sin^2 u = 1 - s^2,$$

$$\frac{ds}{du}\frac{ds}{du_1} + (1 - s^2)\cos J = s \sin^2 J \sin u \sin u_1;$$

en ayant égard aux intégrales connues des aires, on peut les écrire

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 + \left(\frac{cz_1}{nr_1}\right)^2 = 1 - s^2,$$
$$\left(\frac{ds}{du_1}\right)^2 + \left(\frac{cz}{n_1 r}\right)^2 = 1 - s^2,$$
$$\frac{ds}{du}\frac{ds}{du_1} + (1 - s^2)\cos \mathrm{J} = -s^2 \frac{c^2 z z_1}{n n_1 r r_1},$$

où l'on a posé $z = r \sin i \sin u$ et $z_1 = r_1 \sin i_1 \sin u_1$. A l'aide de la dérivée

$$s' = \frac{ds}{du}\frac{n}{r^2} + \frac{ds}{du_1}\frac{n_1}{r_1^2}$$

et des équations (B), l'intégrale des forces vives se change en

$$(\rho\rho')^2 + \frac{1}{4}\rho^4\left(\psi'^2 + \frac{\sin^2\psi\, s'^2}{1 - s^2}\right) + c^2 \cdot \frac{\dfrac{z^2}{r_1^2} + \dfrac{z_1^2}{r^2} + \dfrac{2 z z_1 s}{r r_1}}{1 - s^2} + c^2 = \rho^2(2\mathrm{U} - a).$$

A la place de ψ et de s, j'introduis deux nouvelles variables en faisant

$$\cos\psi = \cos\alpha\cos\beta, \quad s \sin\psi = \cos\alpha\sin\beta.$$

Posons encore

$$\mathrm{U} = \frac{1}{\rho}\mathrm{V};$$

V sera une fonction de α et de β seulement. Il viendra

$$\mathrm{V} = \frac{\varkappa m \sqrt{\dfrac{2m}{1 + m}}}{\sqrt{1 - \cos\alpha\cos\beta}} + \frac{\varkappa m m_1 \sqrt{\dfrac{2 m m_1}{m + m_1}}}{\sqrt{1 - \cos\alpha\cos(\beta - 2\mu)}} + \frac{\varkappa m_1 \sqrt{\dfrac{2 m_1}{1 + m_1}}}{\sqrt{1 + \cos\alpha\cos(\beta - 2\mu_0)}}.$$

Des équations précédentes, il résulte

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - s^2}\sin\psi, \quad \operatorname{tang}\beta = s \operatorname{tang}\psi.$$

On en tire par la différentiation

$$\cos\alpha\,\alpha' = \sqrt{1 - s^2}\cos\psi\,\psi' - \frac{s s' \sin\psi}{\sqrt{1 - s^2}}, \quad \cos^2\alpha\,\beta' = s\psi' + s'\cos\psi\sin\psi,$$

et l'intégrale des forces vives prend la forme

$$(\rho\rho')^2 + \frac{1}{4}\rho^4(\alpha'^2 + \cos^2\alpha\,\beta'^2) + c^2\,\frac{\dfrac{z^2}{r_1^2} + \dfrac{z_1^2}{r^2} + \dfrac{2zz_1 s}{rr_1}}{1 - s^2} + a\rho^2 - 2V\rho + c^2 = 0.$$

Des équations (B) on tire d'ailleurs l'équation identique

$$\frac{\left(n\dfrac{ds}{du} - n_1\dfrac{ds}{du_1}\right)^2}{1 - s^2} = c^2\left(1 - \frac{\dfrac{z^2}{r^2} + \dfrac{z_1^2}{r_1^2} - \dfrac{2zz_1 s}{rr_1}}{1 - s^2}\right),$$

ce qui donne lieu d'introduire la nouvelle variable

$$\gamma_1 = \frac{n\dfrac{ds}{du} - n_1\dfrac{ds}{du_1}}{\sqrt{1 - s^2}}.$$

Pour éliminer les variables z et z_1, à l'équation qui précède je joins encore la suivante :

$$c^2\,\frac{\dfrac{z^2}{r_1^2} + \dfrac{z_1^2}{r^2} + \dfrac{2zz_1 s}{rr_1}}{1 - s^2} = (c^2 - \gamma_1^2)\,\frac{1 + \cos^2\alpha + 2\cos\alpha\cos\gamma}{\sin^2\alpha}.$$

Les dérivées des nouvelles variables γ_1 et γ se déterminent par les deux équations

(1) $$\frac{1}{2}\rho^2\gamma_1' = (c^2 - \gamma_1^2)\,\frac{\cos\alpha\sin\gamma}{\sin^2\alpha},$$

(2) $$\frac{1}{2}\rho^2\gamma' = \frac{1}{2}\rho^2\sin\alpha\,\beta' - \gamma_1\,\frac{1 + \cos^2\alpha + 2\cos\alpha\cos\gamma}{\sin^2\alpha}.$$

A la place des dérivées α' et β', je prends définitivement les deux variables que déterminent les équations

(3) $$\frac{1}{2}\rho^2\alpha' = \alpha_1,$$

(4) $$\frac{1}{2}\rho^2\cos^2\alpha\,\beta' = \beta_1 + \gamma_1\sin\alpha.$$

Les dérivées de β_1 et de α_1 se déterminent par les deux équations

$$(5)\qquad \tfrac{1}{2}\rho^2\beta_1' = \rho\,\frac{dV}{d\beta},$$

$$(6)\qquad \tfrac{1}{2}\rho^2\alpha_1' = -\frac{(\beta_1+\gamma_1\sin\alpha)(\beta_1\sin\alpha+\gamma_1)}{\cos^3\alpha} + (c^2-\gamma_1^2)\frac{2\cos\alpha+(1+\cos^2\alpha)\cos\gamma}{\sin^3\alpha} + \rho\,\frac{dV}{d\alpha}.$$

Enfin on a pour la détermination de ρ l'équation différentielle du second ordre

$$(7)\qquad \rho(\rho\rho')' = \theta - a\rho.$$

Les équations (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7) forment un nouveau système du huitième ordre : à ce système satisfait l'intégrale des forces vives

$$(\rho\rho')^2 + \alpha_1^2 + \frac{(\beta_1+\gamma_1\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha} + (c^2-\gamma_1^2)\frac{1+\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos\gamma}{\sin^2\alpha} + a\rho^2 - 2V\rho + c^2 = 0.$$

Comme d'ailleurs la variable indépendante t ne figure pas dans les coefficients des équations, on peut encore considérer ce système comme étant du sixième ordre. Ce qui le caractérise, c'est que le radical V ne contient que les deux variables α et β, dont la dernière n'entre pas autrement dans les équations.

L'équation différentielle linéaire du second ordre à laquelle satisfait la fonction V peut s'écrire

$$\frac{d^2V}{d\beta^2} + \cos^2\alpha\left(\frac{d^2V}{d\alpha^2} + 2\cot 2\alpha\,\frac{dV}{d\alpha} - \frac{3}{4}V\right) = 0.$$

Il suffit d'un léger changement pour ramener le système à la forme prescrite par Hamilton. Qu'on pose en effet

$$\rho^2 = e^\sigma \quad \text{ou} \quad \sigma = l\rho^2,$$

l désignant les logarithmes naturels et e la base de ces logarithmes. Il

s'ensuivra

$$\rho\rho' = \frac{1}{2}\rho^2\sigma'$$

et l'équation (7) pourra être remplacée par ces deux-ci :

$$\frac{1}{2}\rho^2\sigma' = \sigma_1, \quad \rho^2\sigma'_1 = \mathrm{V}\rho - a\rho^2.$$

Qu'au lieu de t, on prenne pour variable indépendante $\tau = \int \rho^2 dt$ et qu'on pose, pour abréger,

$$\sigma_1^2 + \alpha_1^2 + \frac{(\beta_1 + \gamma_1 \sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha}$$
$$+ (c^2 - \gamma_1^2)\frac{1 + \cos^2\alpha + 2\cos\alpha\cos\gamma}{\sin^2\alpha} + ae^\sigma - 2\mathrm{V}e^{\frac{1}{2}\sigma} + c^2 = \mathrm{H} :$$

l'intégrale des forces vives sera $\mathrm{H} = 0$ et le système du huitième ordre pourra s'écrire

$$\frac{d\sigma}{d\tau} = \frac{d\mathrm{H}}{d\sigma_1}, \quad \frac{d\sigma_1}{d\tau} = -\frac{d\mathrm{H}}{d\sigma},$$
$$\frac{d\alpha}{d\tau} = \frac{d\mathrm{H}}{d\alpha_1}, \quad \frac{d\alpha_1}{d\tau} = -\frac{d\mathrm{H}}{d\alpha},$$
$$\frac{d\beta}{d\tau} = \frac{d\mathrm{H}}{\beta_1}, \quad \frac{d\beta_1}{d\tau} = -\frac{d\mathrm{H}}{d\beta},$$
$$\frac{d\gamma}{d\tau} = \frac{d\mathrm{H}}{d\gamma_1}, \quad \frac{d\gamma_1}{d\tau} = -\frac{d\mathrm{H}}{d\gamma},$$

ce qui est la forme des équations d'Hamilton.

Remarquons en terminant que dans le cas où les deux orbites sont contenues dans un seul et même plan, c'est-à-dire où l'on a $\mathrm{J} = 0$, l'ordre du système s'abaisse de deux unités. De $\mathrm{J} = 0$, il suit, en vertu des intégrales des aires, qu'on a aussi $i = 0$, $i_1 = 0$, et par conséquent $\gamma_1 = c$. D'ailleurs, à cause de $\gamma_1 = c$, la variable γ disparaît du système. Quand on aura intégré le système du quatrième ordre qui reste, on déduira la variable γ de l'équation (2) au moyen d'une quadrature.

Rapport à l'Académie des Sciences sur une communication de M. Vallès, *faite le* 21 *décembre* 1868, *sous ce titre :* Expériences faites à l'écluse de l'Aubois, pour déterminer l'effet utile de l'appareil à l'aide duquel *M. de Caligny* diminue dans une proportion considérable la consommation d'eau dans les canaux de navigation; par MM. Combes, Phillips, de Saint-Venant rapporteur.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXVIII, séance du 18 janvier 1869.)

M. Vallès, Inspecteur général honoraire des Ponts et Chaussées, connu par divers Ouvrages de Mathématiques et d'Hydrologie, avait fait partie, en 1866, d'une Commission d'Ingénieurs et d'Inspecteurs du même corps, chargée de rendre compte d'expériences officielles exécutées en grand aux bassins de Chaillot, sur les effets de l'appareil inventé par M. de Caligny, et dont nous venons de dire l'objet. Son installation avait été ordonnée par M. le Ministre des Travaux publics, à la suite de Rapports de deux précédentes Commissions, appelées en 1849 et en 1869 à assister à des épreuves faites en petit.

D'après l'avis très-favorable de la nouvelle Commission, dont M. Vallès était le rapporteur [*], M. de Caligny a été invité par le Ministre à rechercher, sur un des canaux de la France, une localité convenable, et à concerter avec les ingénieurs les dispositions à

[*] Le résumé officiel de son Rapport a été imprimé au *Journal de Mathématiques* (*voir* t. XI, 2e série, p. 412), et au *Bulletin de la Société Philomathique* du 2 février 1867.

prendre pour la construction d'un appareil destiné à fonctionner habituellement.

Le choix a porté sur l'écluse de l'Aubois, du canal latéral à la Loire (près de la célèbre usine de Fourchambault), parce que le niveau de son bief d'amont, qui a très-peu de longueur, est sujet à baisser notablement à chaque passage de bateau, de sorte qu'il importait, là plus qu'ailleurs, d'économiser beaucoup la dépense de volume d'eau que tout passage exige.

M. l'Inspecteur Vallès, désireux de reconnaître l'établissement définitivement donné à l'appareil qui avait fait dans un état provisoire l'objet de son étude, et d'en déterminer exactement l'effet utile, s'est rendu en 1868 à l'écluse de l'Aubois, où les travaux venaient d'être exécutés. Il y a séjourné une semaine, formant des agents à la double manœuvre du remplissage et de la vidange du sas, et se livrant journellement à des expériences relatives d'abord à la vidange.

Il vous en a adressé les résultats le 21 décembre, par les mains de M. le Maréchal Vaillant. Sa communication a été renvoyée à une Commission composée de M. Combes, de M. Phillips et de moi. Et, depuis quelques jours, M. Vallès nous a remis, pour l'y annexer, deux Compléments.

Le premier donne un tableau des résultats analogues relatifs au remplissage, observés depuis son retour à Paris, et conformément à ses instructions, par M. Perrault, conducteur des Ponts et Chaussées. Les chiffres que donne cet agent intelligent et soigneux [*] sont les mêmes que ceux qui figurent dans une lettre adressée à l'inventeur par M. de Marne, Ingénieur en chef du canal, certifiant ainsi qu'on peut les regarder comme exacts.

Le deuxième Complément donne, avec une description des procédés de mesurage, un détail, que nous lui avons demandé, des chiffres relatifs à la vidange, dont M. Vallès n'avait d'abord présenté qu'une moyenne générale. Il y a joint les résultats d'observations relatives à une manœuvre qui économise le temps en sacrifiant une partie de l'effet

---

[*] M. le conducteur Perrault s'est employé à toutes les opérations et à une intelligente mise en train du procédé avec un dévouement digne d'éloges.

utile : manœuvre particulière dont on pourra faire usage dans des moments de presse, si alors l'eau ne manque pas.

On voit qu'il n'est pas précisément question, comme en 1849, 1860 et 1866, d'essayer un système nouvellement inventé et de s'assurer de la possibilité de son usage. L'appareil de M. de Caligny reçoit un premier emploi, et il s'agit aujourd'hui d'en apprécier les avantages, plus exactement que jusqu'ici on n'a pu faire.

Commençons par en donner quelque idée d'après la description très-claire qu'en fait M. Vallès, en parlant d'abord des autres appareils ou procédés qui ont été précédemment proposés pour le même objet.

Dans son état habituel, le sas de toute écluse reste généralement vide. On le remplit, puis on le vide de nouveau pour chaque passage de bateau, soit descendant, soit montant. Cette manœuvre consomme, c'est-à-dire fait descendre du bief d'amont au bief d'aval, un volume d'eau égal à la capacité du sas.

Pour diminuer cette consommation, à laquelle l'alimentation supérieure ne suffit pas toujours, divers moyens ont été proposés. Il en est un qui date de 1643, dont on a, depuis, fait quelque usage en Angleterre. C'est celui de l'écluse de Bouzingues, en Belgique, à savoir : la construction et l'emploi d'un *bassin d'épargne* latéral au sas et d'une superficie au moins égale. On y met en réserve (comme dit M. Minard dans son *Cours de navigation intérieure*) le tiers du volume d'eau de chaque éclusée pour en faire profiter l'éclusée suivante ; avec deux bassins on en réserverait la moitié, et, avec trois (toujours de la même superficie que le sas), les trois cinquièmes. Mais les frais de ce procédé et ses inconvénients, entre autres celui de ralentir sensiblement la manœuvre, ont empêché d'en faire en France aucun usage. On n'a pas non plus suivi le conseil que donnait feu Girard, de multiplier les écluses en atténuant leurs chutes.

Divers autres procédés ont été successivement proposés sans avoir jamais été l'objet d'essais en grand. Ainsi, MM. Solage et Bossut rendaient le sas mobile. M. Burdin fermait par un couvercle un grand bassin latéral où l'eau entrait et dont elle sortait avec l'aide d'un piston. M. de Betancourt, ingénieur français d'origine, qui était au service de l'Espagne au commencement de ce siècle, déterminait l'enfoncement,

aussi dans un grand bassin, d'un volumineux flotteur faisant passer l'eau de ce bassin dans le sas pour le remplir, et il l'en retirait pour que le sas s'y vidât. M. Busby, ingénieur anglais, prenait, en 1813, une patente (*Repertory of Arts*, t. XXIII et XXIV) où le flotteur était creux, à deux compartiments superposés, recevant par des siphons, l'un de l'eau d'amont, l'autre de l'eau d'aval, et restituant ensuite ces quantités d'eau presque entières à leurs biefs respectifs. C'est ce même procédé qui, ingénieusement perfectionné en 1843, ou pour mieux dire inventé à nouveau et généralisé pour des écluses doubles, etc., par M. l'Ingénieur civil D. Girard, lui a fait décerner en 1845 le grand prix de Mécanique, sur le Rapport très-favorable de M. Poncelet, qui, après y avoir indiqué une amélioration de détail, s'est plu à faire une étude approfondie et savante de ce système, qui semble porter l'économie d'eau à son maximum. L'administration en fit l'acquisition, mais elle n'en a pas exécuté de spécimen.

L'appareil de M. de Caligny, ou de l'écluse de l'Aubois, que nous avons à examiner ici, est fondé sur un tout autre principe. Il produit son économie d'eau immédiatement ou pour l'éclusée même qui est en jeu, au lieu d'opérer comme le bassin de Bouzingues, pour l'éclusée suivante, une réserve que des fuites peuvent diminuer sensiblement.

Il revient à user, de suite, du travail produit par la chute de l'eau soit du bief d'amont dans le sas, soit du sas dans le bief d'aval, pour faire remonter à un niveau supérieur une certaine autre quantité de ce liquide. Tout récepteur hydraulique, tel que serait une roue à aubes en y adaptant toute machine élévatoire telle qu'une pompe, produirait plus ou moins un effet de ce genre; mais il importait que l'appareil adopté fût simple, d'un bon rendement malgré la variabilité de la force motrice, d'une manœuvre facile et de courte durée, enfin peu ou point sujet aux dérangements, et susceptible de laisser passer de l'eau chargée de vase ou de menus corps flottants, sans jamais s'encombrer. Les expériences de 1866 ont fait présumer que l'appareil exécuté en 1868 à l'Aubois, et que nous avons à apprécier, remplirait ces conditions. Il consiste essentiellement : 1° en un gros tuyau horizontal en maçonnerie, placé en contre-bas de la tenue d'eau d'aval et débouchant dans le sas vers l'extrémité inférieure de celui-ci ; 2° en un fossé de décharge commençant aussi vers l'amont et allant déboucher en aval au-dessous

de l'écluse. Les seules pièces mobiles sont deux manchons ou larges tubes verticaux en tôle, de faible hauteur, ouverts aux deux extrémités, et reposant sur deux ouvertures circulaires de même diamètre faites au ciel du tuyau horizontal. Si leur manœuvre se fait entièrement à la main, l'éclusier les soulève sans effort avec des leviers du premier genre, portant d'un côté un secteur sur lequel s'applique une chaîne de suspension, et de l'autre une tiraude avec contre-poids. Bien que ces deux tubes verticaux soient placés très-proches l'un de l'autre, l'un d'eux peut être appelé *tube d'amont*, parce que son soulèvement fait descendre dans le tuyau horizontal l'eau prise à l'amont, dont il est entouré; l'autre sera nommé *tube d'aval*, parce que l'espace qui entoure sa paroi extérieure se trouve en communication avec le fossé de décharge qui est comme une annexe du bief d'aval.

S'agit-il de vider le sas supposé déjà rempli? On soulève le tube dit *d'aval;* les eaux du sas parcourent le tuyau et se précipitent dans le fossé de décharge en passant de tous côtés par l'ouverture annulaire que produit le soulèvement de cette espèce de soupape sans pression. Or, si, après avoir tenu le tube ainsi soulevé pendant quelques secondes, on le laisse retomber sur son siége, l'eau du long tuyau horizontal, animée d'une grande vitesse, ne pouvant continuer de s'échapper par l'ouverture qui lui était faite et qu'on vient d'intercepter, monte, en vertu de son inertie ou de sa force vive acquise, par l'intérieur de ce tube d'aval, et aussi du tube d'amont, et cela sans brusquerie et sans coup de bélier. Il en résulte, si les bouts supérieurs de ces tubes s'élèvent à quelques centimètres au-dessus du niveau de l'eau d'amont, et s'ils sont entourés d'une bâche convenablement disposée, qu'une portion de l'eau *monte du sas dans le bief d'amont de l'écluse.* Ainsi commence à se trouver utilisé le travail de la descente d'eau opérée.

Lorsque l'eau a cessé de monter ainsi et que ce qui en reste dans les tubes est redescendu par une oscillation en retour, on soulève de nouveau le tube d'aval, puis au bout de quelques secondes on le laisse retomber. Il en résulte, dans le sas qui est à vider, un nouvel abaissement de l'eau, dont une première portion descend dans le bief d'aval, et dont ensuite une autre portion monte encore dans le bief d'amont. Et l'on continue cette manœuvre périodique jusqu'à ce que l'ascension

d'eau qu'on veut obtenir soit devenue insignifiante pour l'épargne; alors on laisse écouler librement vers l'aval, en tenant le tube soulevé, le reste de l'eau du sas.

S'agit-il, au contraire, de remplir le sas supposé vide? On le fait par une opération inverse et qui, malgré sa simplicité, est si singulière dans son effet, que l'on a vu des ingénieurs expérimentés rester longtemps sans la comprendre. On soulève le tube dit *d'amont;* l'eau du bief supérieur se précipite, par l'espace annulaire ainsi ouvert, dans le long tuyau, et de là dans le sas. Au bout de quelques secondes on laisse retomber le tube d'amont sur son siége et on soulève le tube d'aval; l'eau qui, dans le long tuyau, a acquis une grande vitesse, continue sa marche *et fait dans ce tuyau un vide* qui appelle, par l'ouverture du dessous du tube d'aval soulevé, l'eau du fossé de décharge, c'est-à-dire *l'eau du bief d'aval.* Quand ce reflux artificiel cesse, on laisse retomber le tube d'aval et on soulève de nouveau le tube d'amont, et ainsi de suite. A chacune de ces doubles opérations successives, le sas se remplit, comme on voit, partie avec de l'eau prise en amont à un niveau supérieur, et partie avec de l'eau *prise en aval à un niveau inférieur,* grâce à cette espèce de machine pneumatique, ou de pompe aspirante sans piston ni clapet, dans laquelle se transforme spontanément le long tuyau horizontal chaque fois qu'on abaisse le tube d'aval après l'avoir tenu quelques instants soulevé.

L'épargne d'eau produite par l'appareil ainsi décrit sera la somme des quantités du fluide soulevé du bief d'aval dans le sas pendant le remplissage, et du fluide soulevé du sas dans le bief d'amont pendant la vidange, car ce sera là ce qu'un passage de bateau exigera de moins que l'éclusée complète habituellement dépensée. Et le *rendement*, ou effet utile proportionnel, aura pour mesure la fraction obtenue en divisant cette somme par le volume de l'éclusée, ou, ce qui revient au même, en divisant par la hauteur de la chute la somme des hauteurs d'eau du sas : les unes obtenues du bief d'aval, les autres passées au bief d'amont. Ces hauteurs sont celles d'abaissement et d'élévation qu'on mesure dans le sas, les premières pendant qu'un tube est levé, les autres pendant qu'il est baissé.

M. Vallès a fait, pour obtenir ces hauteurs, une suite nombreuse d'expériences de vidange du sas, dans lesquelles le nombre des périodes,

c'est-à-dire des soulèvements et des abaissements du tube d'aval, a varié de dix à douze.

Il donne, dans sa Note de décembre, un tableau des abaissements totaux qui en sont résultés dans l'eau du sas pour les huit premières expériences faites, afin seulement de montrer leur presque constance, car ils n'ont guère varié que de $1^{m},70$ à $1^{m},75$, la chute totale de l'écluse étant de $2^{m},40$ à $2^{m},45$. Et, dans sa deuxième Note complémentaire, il fournit le détail des abaissements partiels ayant lieu pendant chacune des moitiés des douze périodes dont se sont composées les quatre expériences les plus sûres. Ils ont été observés, comme il le dit, en introduisant un bateau dans l'écluse pour diminuer l'agitation du fluide, et en comparant, après chaque demi-période, à l'aide de deux perches, la hauteur du bateau avec celle du sommet des bajoyers.

Il donne les abaissements observés à l'extrémité supérieure du sas et ceux qui ont été observés à l'extrémité inférieure : ceux-ci sont beaucoup plus forts que ceux-là dans les premières périodes ; ils ne deviennent sensiblement égaux que dans les dernières. Ces différences prouvent simplement que l'eau dans le sas avait une pente très-sensible pendant les forts écoulements, comme naturellement cela devait être ; et la demi-somme des deux abaissements mesurés donnait ce qu'il fallait pour calculer les volumes.

M. Vallès regrette de ne pouvoir faire connaître en particulier les nombres appartenant à chacune des quatre expériences dont on parle ; il n'en a pas conservé la note, les moyennes partielles pour toutes quatre ayant été composées sur les lieux avec des nombres qu'il se rappelle très-bien avoir différé très-peu d'une expérience à l'autre pour les mêmes périodes. Ces moyennes partielles, données *pour chaque perche,* peuvent donc être considérées comme fournissant tout ce qu'il faut avec une approximation suffisante ; surtout quand on compare le résultat avec celui de Chaillot où l'on avait d'autres moyens d'observation et en même temps des causes de pertes d'effet ; et aussi, en faisant la comparaison avec ce qui a pu être mesuré lors du remplissage du sas, où il y a plus de régularité et moins d'agitation.

Quant aux chiffres relatifs au remplissage, ils sont donnés avec tout leur détail dans le premier Complément, pour deux expériences à huit

périodes. Il y a eu un tel accord entre ces deux expériences, que le conducteur Perrault a cru inutile d'en faire d'autres.

Il résulte de ces moyennes générales que la portion de l'effet utile, ou rendement, obtenue pendant le remplissage est $\frac{1^{m},101}{2^{m},43} = \ldots$ 0,412

et la portion pendant la vidange est moyennement $\frac{0,926}{2,40} = \ldots$ 0,386

Effet utile total..... 0,798

soit 0,80 ou les *quatre cinquièmes*.

M. Vallès avait prévu, dès avant les dernières expériences, que l'effet utile partiel devait être plus considérable pendant le remplissage que pendant la vidange. Cela tient à ce que la variabilité du niveau des eaux dans le bief d'amont, exceptionnellement très-court comme on a dit, a obligé d'élever le bord supérieur des tubes à 10 centimètres plus haut qu'il ne faudrait dans les localités où les tenues d'eau sont à l'état ordinaire. Il pense que, dans ces localités normales, on obtiendrait bien 0,83 au lieu de 0,80.

Dans le deuxième Complément, M. Vallès rend compte d'expériences ayant pour objet d'économiser le temps en sacrifiant une partie de l'effet utile, ce qui est possible à certaines époques de l'année. Alors, en bornant l'opération à six périodes, il ne fait, en vidant le sas, remonter que $0^{m},563$ d'eau en amont, ce qui fait une épargne de $\frac{0,563}{2,40} = 0,235$. Si, pendant le remplissage, on suppose par analogie 0,265, l'on a, en additionnant, toujours une épargne de moitié. Mais on n'abrége ainsi le temps que d'une minute et demie, et il paraîtra sans doute généralement préférable de faire la manœuvre complète et toute l'épargne d'eau dont on a présenté une évaluation tout à l'heure.

Il évalue aussi le rendement de l'appareil envisagé seulement comme machine élévatoire. Pour cela, il multiplie, afin d'avoir les quantités de travail, les volumes fluides par les hauteurs d'ascension ou de descente de leurs centres de gravité. Il trouve que, dans la manœuvre de la vidange, le rendement a été de 76 pour 100, et que dans celle du remplissage il a été de 81. Nous n'insistons point sur cette considération, qui est étrangère à notre objet principal.

Mais ce qui intéresse cet objet, c'est la ressource supplémentaire dite *des grandes oscillations finales et initiales,* que l'on tire à volonté du même appareil pour produire une épargne d'eau additionnelle, profitable, comme dans le système de Bouzingues, au passage de bateau qui suivra. Voici en quoi elle consiste, et le résultat de la mesure détaillée que M. Vallès en a faite.

Quand la manœuvre alternative du soulèvement et de l'abaissement du tube d'aval, pendant la vidange du sas, a cessé de produire des ascensions sensibles d'eau vers l'amont, l'on tient ce tube levé, et ce qui reste d'eau dans le sas se précipite, par l'intermédiaire du long et large tuyau, dans le fossé de décharge qui communique avec l'aval. Si, alors, on laisse se fermer, par une porte de flot qu'on y a établie, l'extrémité inférieure de ce fossé, il résulte de la vitesse acquise, et nonobstant la direction du cours de l'eau, inverse de ce qu'elle est dans le tuyau, *que ce fluide monte, dans le fossé, plus haut qu'il ne se tient ensuite dans le sas d'où il est parti.* Un excès de 15 centimètres a été mesuré pour cet effet, que produit naturellement tout *siphon renversé.* Il s'ensuit, en abaissant alors le tube vertical d'aval pour intercepter la communication avec le sas, que le fossé de décharge fera *bassin d'épargne* pour une certaine tranche d'eau, tranche que l'on emploiera, au passage suivant de bateau, pour remplir d'autant le sas, avant de rien emprunter au bief d'amont. Même, alors, par une autre grande oscillation, dite *initiale,* et encore analogue à celles qu'offre un siphon renversé, l'expérience montre que l'eau ainsi introduite dans le sas s'y tient notablement plus haut qu'elle n'est ensuite dans le bassin d'où elle vient, ce qui ajoute encore un peu à l'épargne.

De même, lors du remplissage, et après que le jeu des tubes a cessé d'aspirer profitablement de l'eau d'aval, si, en achevant de remplir le sas au moyen de la levée du tube d'amont, l'on ferme par une porte de flot l'entrée du petit bassin maçonné qui contient les tubes et qui communique avec le bief d'amont habituellement, la *grande oscillation* finale d'arrivée de son eau dans le sas fait monter dans celui-ci le fluide *plus haut* qu'il ne sera ensuite dans le petit bassin dont nous parlons; et ce bassin, quand on en abaisse le tube, ne contient plus l'eau qu'à un niveau inférieur à celui du bief d'amont. Il en résulte, dans ce même petit bassin maçonné, une sorte d'*épargne inverse* qui

profitera à la vidange du passage suivant, car on y fera arriver naturellement, du sas, la tranche d'eau qui y manque pour atteindre le niveau d'amont, et ce sera autant de moins à envoyer en aval. Une *grande oscillation initiale* aura même lieu alors, avec petit surcroît de profit.

M. Vallès, qui a mesuré les dénivellations produites par ces quatre grandes oscillations, surtout les finales, en conclut, pour l'épargne supplémentaire qu'elles peuvent fournir un chiffre de 10 pour 100 du volume de l'éclusée. L'épargne totale due au système serait ainsi de 90 pour 100.

Un pareil résultat, s'il est confirmé, devrait être attribué à la simplicité de l'appareil, qui ne contient ni clapets ni pistons, et qui ne produit pas de chocs, parce que, comme dans la plupart de ceux de M. de Caligny, l'on s'est interdit toute fermeture de la section transversale du tuyau.

Son inventeur compte peu, toutefois, sur l'obtention habituelle, dans la pratique, des 10 pour 100 dont on vient de parler, parce qu'il peut en résulter du ralentissement dans la manœuvre, et que le temps a aussi besoin d'être épargné. Mais cette économie d'eau éventuelle pourra cependant être recherchée dans les lieux où il y a pénurie d'alimentation, avec des chutes très-hautes, comme aux environs des points de partage. Aussi M. Vallès en a toujours fait, avec raison, l'un des sujets de son examen.

Maintenant, obtiendra-t-on dans la pratique courante, et sans même compter ce surcroît final possible, les épargnes d'eau qui résultent des expériences ci-dessus? Un éclusier fera-t-il toujours jouer les tubes dix et douze fois, sans y mettre plus de cinq à six minutes que M. Vallès a comptées, y compris l'achèvement? Ce procédé, enfin, est-il appelé à devenir usuel dans tous les lieux et dans tous les temps où les voies navigables artificielles souffrent de la pénurie d'eau?

Ces questions ne pourront être jugées qu'à la suite d'un usage d'une certaine durée. Elles ne font pas l'objet essentiel de la communication de M. Vallès. Toutefois l'honorable et savant Inspecteur général les a traitées en partie et accessoirement. Il énonce que des signes non équivoques caractérisent l'instant où il faut abaisser les tubes après les avoir tenus levés, de manière à obtenir dans chaque période le plus

grand effet possible. On sait qu'en général les maxima restent quelque temps stationnaires, ou qu'ils varient fort peu pour des variations très-sensibles des éléments dont ils dépendent. On sait aussi que, dans des manœuvres délicates, et à cause même de leur délicatesse un peu scientifique qui souvent flatte et stimule l'esprit des simples ouvriers, ils acquièrent quelquefois en peu de temps l'instinct pratique du mieux possible.

D'ailleurs, après les deux ou trois premières périodes, où la manœuvre des tubes doit être opérée à la main, une expérience faite à Saint-Lô a prouvé que le reste pouvait être opéré *automatiquement* par une force de *succion* en rendant légèrement tronconique le bas des tubes et en le garnissant d'un rebord saillant et relevé, comme dans une autre machine déjà connue, qui a valu au même inventeur des récompenses aux deux dernières Expositions. Enfin, quant au temps de la manœuvre, M. Vallès a fait observer que les larges ouvertures, de $1^{m},40$ de diamètre, que découvre la levée des tubes, donnent un passage incomparablement plus prompt aux eaux que les ventelles perçant habituellement les portes dont elles compliquent la construction, et qui ne se manœuvrent qu'à l'aide de puissants crics; de sorte que, d'après lui, la considération du temps, qui fait le côté faible des autres systèmes mentionnés plus haut, ne paraît point défavorable à celui dont on vient de s'occuper.

En conséquence, vos Commissaires, en faisant des réserves relativement à des points que l'usage seul pourra résoudre, et à de légères incertitudes que laissent les mesurages opérés, estiment que le système d'écluse à épargne d'eau établi sur le canal latéral de la Loire contre la rivière de l'Aubois est ingénieux, et scientifiquement fondé; qu'il donne, en supposant même que l'on dût réduire sensiblement les chiffres annoncés, un effet utile remarquable, avec des chances de perfectionnements ultérieurs. Et ils vous proposent de remercier M. Vallès de vous avoir fait part de considérations aussi intéressantes au point de vue de l'art des ouvrages de navigation intérieure.

Les conclusions de ce Rapport sont adoptées.

Note sur les moyens de rendre automatique le système d'écluses de navigation décrit t. XI, 2e série, p. 405, rédigée à l'occasion du Rapport précédent;

PAR M. ANATOLE DE CALIGNY.

Dans le Mémoire dont il s'agit je n'ai indiqué aucun moyen de rendre cette écluse automatique, parce que MM. les Ingénieurs des Ponts et Chaussées qui avaient fait le dernier Rapport sur mes expériences ne pensaient pas que cela fût bien utile. Mais dans le Rapport à l'Institut on paraît attacher une certaine importance à ce qu'on obtienne une marche automatique. Je vais donc indiquer d'après quels principes cette marche pourra être étudiée. Il en résultera d'ailleurs quelques développements relatifs à certaines parties de ce Rapport.

Quand on commence à vider l'écluse, il se produit, si l'on veut, du sas dans un réservoir en communication alternative avec le bief d'amont, une grande oscillation qui peut faire baisser d'une quantité considérable le niveau de l'eau dans le sas, selon que les dimensions du bassin précité sont plus ou moins grandes. Il en résulte que lorsqu'on met ensuite l'appareil en train, outre les avantages de cette première grande oscillation indiqués pages 9 et 10 du Rapport à l'Institut, la première oscillation en retour descend beaucoup plus profondément qu'elle ne le ferait s'il n'y avait déjà une grande baisse dans le niveau de l'écluse.

Si donc le tube d'aval a un diamètre plus grand que son extrémité inférieure, on conçoit qu'il pourra être soulevé par un contre-poids, quand l'eau sera descendue à son intérieur d'une quantité suffisante pour ne plus faire équilibre à ce contre-poids; ce tube étant soulevé sera ensuite ramené en temps utile sur son siége par un principe de succion à contre-courant. En un mot, l'appareil fonctionnera d'une manière parfaitement analogue au jeu du système de mon invention

qui a été honoré d'une *Médaille d'argent* à l'Exposition universelle de 1867 [*]. On verra d'ailleurs dans la pratique s'il vaut mieux que la première grande oscillation descende assez bas dans l'écluse pour que le système devienne immédiatement automatique, ou s'il vaut mieux qu'il ne le soit qu'après une ou deux périodes.

Quand le niveau sera convenablement baissé dans l'écluse en vertu de cette marche automatique, une grande oscillation finale jettera une quantité d'eau considérable dans la rigole de décharge, alternativement transformée en bassin d'épargne, par une porte de flot, ainsi que cela est expliqué dans le Rapport à l'Institut.

Lorsqu'ensuite on voudra remplir l'écluse, l'eau, mise ainsi en réserve, produira, de la rigole de décharge dans le sas, une grande oscillation de remplissage. Si l'exhaussement qui en résultera dans l'écluse est assez grand, le tube d'amont pourra être soulevé par un contre-poids, parce que l'eau qui entrera dans ce tube tendra à le soulever de bas en haut, c'est-à-dire contre-balancera en partie la pression de l'eau du bief d'amont sur son extrémité inférieure élargie, au lieu d'être rétrécie comme la partie inférieure du tube d'aval doit l'être.

Mais il n'est pas probable que cette première grande oscillation, suivie, il est vrai, d'une oscillation plus élevée dans les tubes verticaux, suffise pour faire lever le tube d'amont. La pratique montrera si une ou deux oscillations de la machine proprement dite ne seront pas nécessaires avant qu'on puisse faire remonter l'eau dans ce tube à une hauteur suffisante, par une oscillation en retour, pour le faire lever de lui-même; tandis que la pression, agissant de haut en bas dans le tube d'aval, tiendra alors celui-ci baissé.

Le tube d'amont étant levé, redescendra d'ailleurs de lui-même en temps utile, au moyen d'un principe de succion qui a déjà été employé à cet usage à l'écluse de l'Aubois.

A partir du moment où le tube d'amont reposera sur son siége, l'eau baissera dans ce tube et dans celui d'aval. Or, ce dernier se lèvera de lui-même, comme cela a été expliqué ci-dessus, au moyen d'un contre-poids, quand l'eau sera convenablement baissée à son intérieur,

---

[*] *Voir* le Mémoire sur cette machine, publié dans le t. VII, 2e série, 1862, de ce Journal, et le Mémoire sur une machine soufflante, t. XIII, 2e série, 1868.

et l'eau de la rigole de décharge sera aspirée, ainsi que cela est expliqué dans le Rapport à l'Institut.

A cette époque le tube d'amont sera tenu baissé, en vertu de la pression de l'eau du bassin d'amont au-dessus de son extrémité inférieure. Il ne s'agira plus que de faire revenir le tube d'aval sur son siége quand l'aspiration de l'eau de la rigole de décharge sera finie à chaque période. Ce point est le plus délicat qui reste à étudier; cela peut être obtenu au moyen des phénomènes de succion résultant du retour d'une partie de l'eau entrée dans l'écluse, ou par d'autres moyens.

Au reste, abstraction faite de ce détail secondaire, on voit déjà que le travail de l'éclusier sera réduit à très-peu de chose, surtout si l'on parvient à supprimer complétement le travail nécessaire pour ouvrir et fermer les ventelles des portes d'écluse existantes.

Quant à la grande oscillation finale de remplissage, il suffit de rappeler qu'elle est expliquée dans le Mémoire précité de 1866 et dans le Rapport à l'Institut.

Je dois rappeler aussi [*] qu'il se perd dans la manœuvre ordinaire beaucoup d'eau, par suite des grandes ondes résultant dans le bief d'aval du mode de décharge en usage, parce que ces grandes ondes, qui seront évitées dans le nouveau système, font souvent verser de l'eau au-dessus des portes de l'écluse immédiatement en aval.

Quant à la marche automatique, on sera obligé, il est vrai, de se servir d'oscillations en retour qui augmentent un peu la durée de chaque opération de remplissage ou de vidange. Mais il résulte d'expériences, dont on a dit quelques mots dans le Rapport à l'Institut, que si l'on se privait de ces oscillations on diminuerait notablement l'effet utile dans certaines conditions de la manœuvre; de sorte que tout bien compensé, il est utile de s'en servir en profitant d'ailleurs de l'avantage qui en résultera pour obtenir une marche automatique, ou du moins tellement simplifiée, que non-seulement cela diminuera le travail de l'éclusier, mais que cela donnera plus de sûreté à ses manœuvres.

Depuis que ce qui précède est écrit, j'ai fait à l'écluse de l'Aubois quelques expériences ayant pour but l'étude des modifications qui

[*] *Voir* mon *Mémoire sur les ondes* publié t. XI, 2e série, de ce Journal.

doivent être faites pendant le chômage du canal relativement à la marche automatique, dont on ne s'était pas occupé dans la construction de l'appareil à cette écluse.

Le tube d'aval n'étant pas encore disposé de manière à fonctionner de lui-même comme il l'était dans les expériences faites à Saint-Lô et aux bassins de Chaillot, où sa partie inférieure était rétrécie, c'est sur le tube d'amont que j'ai fait dernièrement des expériences pour obtenir une marche automatique d'après les principes exposés ci-dessus. Ces expériences ont très-bien réussi, mais il a fallu modérer la percussion de ce tube sur son siège, quand il y a été ramené par un effet de succion. Pour y parvenir, j'ai divisé en deux parties le contre-poids du balancier de ce tube. Une des parties de ce contre-poids est attachée invariablement à ce balancier, l'autre y est attachée au moyen d'une corde ou chaîne alternativement détendue. Cette partie du contre-poids est assez grande et vient se poser alternativement sur le sol. Il en résulte qu'à l'époque où le tube d'amont commence à descendre par l'effet de succion précité, cette partie du contre-poids n'agit point sur le balancier; mais qu'à l'époque où le tube dont il s'agit achève sa course descendante, sa vitesse est convenablement modérée par le travail de cette partie du contre-poids qui trouve alors sa chaîne tendue, et n'a même besoin d'agir que le long d'un chemin assez court pour modérer très-convenablement la percussion du tube sur son siége.

Malgré l'état de vétusté des anciennes portes de l'écluse de l'Aubois, j'ai déjà pu faire d'heureuses tentatives pour les faire ouvrir d'elles-mêmes, sans qu'on soit d'ailleurs obligé d'ouvrir leurs ventelles.

Lorsque l'appareil qui remplit l'écluse cesse de fonctionner utilement, et qu'on achève de la remplir en laissant le tube d'amont levé, et en laissant d'ailleurs le bassin de ce tube en communication avec le bief d'amont, l'eau monte dans le sas, en vertu de sa vitesse acquise dans le grand tuyau de conduite, au-dessus du niveau du bief d'amont. Il en résulte que les portes d'amont de l'écluse s'entr'ouvrent d'elles-mêmes, avec assez de force pour qu'un très-léger effort de l'éclusier les fasse ouvrir en entier quand il saisit bien l'instant opportun. Il y a lieu d'espérer que ces portes s'ouvriront en entier d'elles-mêmes quand elles seront refaites à neuf et ajustées avec plus de soin. Mais dans l'état actuel des choses, il faudrait même déjà prendre des précautions

pour qu'elles ne se refermassent pas d'elles-mêmes, en vertu de leur élasticité, tant elles s'ouvrent convenablement avec l'aide d'un très-léger effort de l'éclusier.

Quand l'appareil qui vide l'écluse ne fonctionne plus utilement, si l'on achève de la vider en laissant le tube d'aval levé et en laissant la rigole de décharge en communication avec le bief d'aval, l'eau descend dans le sas, en vertu du mouvement acquis dans le grand tuyau de conduite, au-dessous du niveau du bief d'aval; de sorte que les portes d'aval de l'écluse s'entr'ouvrent d'elles-mêmes, et de la même quantité en général que se sont ouvertes les portes d'amont dans l'autre opération; si l'éclusier saisit aussi le moment convenable, il achève de les ouvrir avec une grande facilité. Cependant jusqu'à présent la sûreté de l'ouverture spontanée des portes d'aval est un peu moindre que celle des portes d'amont. C'est une raison de plus pour qu'il soit utile de refaire cette expérience avec des portes neuves convenablement ajustées.

Le grand tuyau de conduite a une propriété intéressante relativement au travail nécessaire pour faire entrer ou sortir de l'écluse pleine les grands bateaux chargés. Quand un de ces bateaux entre, il refoule devant lui une masse d'eau qui, dans l'état actuel des écluses, est obligée de passer au-dessous de lui ou le long de ses flancs. La résistance considérable et par suite le ralentissement qui en résultent dans la manœuvre sont considérablement atténués à l'écluse de l'Aubois, lorsqu'on a mis la partie postérieure de cette écluse en communication avec le bief d'amont en levant le tube d'amont.

Quand le bateau sort de l'écluse, il refoule dans le bief d'amont une masse d'eau qui serait de même obligée de passer au-dessous de lui ou le long de ses flancs. La résistance et par suite le ralentissement qui en résultent dans la manœuvre sont de même considérablement atténués lorsqu'on met la partie postérieure de l'écluse en communication avec le bief d'amont par le grand tuyau de conduite.

Craignant que les bateliers ne missent de la complaisance dans leurs réponses, j'ai profité d'une circonstance où un grand bateau était chargé d'une manière exceptionnelle. J'arrêtais à volonté ou je remettais ce bateau en marche, sans avertir les bateliers, en baissant ou relevant le tube d'amont.

On voit déjà qu'il y a divers moyens d'abréger la manœuvre, en employant le nouveau système. Dans son état actuel, la durée de chaque oscillation en retour est à très-peu près de douze secondes. Mais, si l'on ne faisait dégorger l'eau relevée au bief d'amont que par le tube d'amont, en prolongeant suffisamment le tube d'aval, comme dans les dessins de celui de mes appareils dont il s'agit, qui ont été gravés en 1868 dans le *Génie industriel* de M. Armengaud et dans la *Revue universelle* de M. de Cuyper, on pourrait diminuer notablement la durée de ces oscillations en retour.

En effet, pour qu'il n'y ait aucun *coup de bélier*, quand on baisse le tube d'aval, il n'est pas nécessaire que l'intérieur de celui-ci soit entièrement libre. Une partie de sa capacité peut être occupée par un cylindre vertical, terminé inférieurement en pointe. Il y a même lieu de penser que cela permettra de ne pas enfoncer aussi profondément le siége de ce tube au-dessous du niveau du bief d'aval qu'on l'a fait pour éviter l'introduction de l'air dans le grand tuyau de conduite.

Quoi qu'il en soit, la durée des oscillations en retour sera diminuée par ce cylindre à très-peu près dans le rapport de la racine carrée de la somme des sections cylindriques restées libres dans les deux tubes verticaux à la racine carrée de la somme des sections totales qu'auraient ces deux tubes si ce cylindre n'existait pas.

Il résulte de diverses considérations indiquées ci-dessus que les grandes oscillations initiales et finales doivent être étudiées à plusieurs points de vue, soit à celui de l'ouverture spontanée des portes de l'écluse, soit à celui de l'épargne de l'eau, soit à celui des facilités qu'elles donnent pour la marche automatique des tubes verticaux.

Dans ce dernier cas, elles permettent d'ailleurs, si l'on sacrifie une partie de leurs avantages pour l'économie de l'eau, d'obtenir, au moyen d'écoulements en retour, des oscillations assez grandes dans les tubes verticaux pour changer complétement l'état de la question, quant aux facilités qui en résultent pour la marche automatique.

Nota. — Je me suis borné à exposer le résultat de mes dernières expériences à l'écluse de l'Aubois. Le moyen que j'ai employé pour amortir la percussion du tube d'amont sur son siége m'a paru très-satisfaisant. Cependant il est intéressant de remarquer qu'on peut se

servir, pour atteindre le même but, d'un flotteur alternativement émergé, après avoir été entièrement plongé, et qui serait invariablement attaché au balancier par une tige. Ce système offrirait l'avantage d'éviter l'inconvénient quelconque de déplier alternativement une chaîne; et, de plus, toutes les masses partant du repos en même temps, il n'y aurait aucune chance de changement brusque de vitesse. Or, au moment où le contre-poids alternativement déposé sur le sol est saisi par la chaîne, quand elle se tend en vertu du mouvement acquis du tube, du balancier et de l'autre partie du contre-poids, l'inertie occasionne une résistance brusque, dont au reste l'effet a paru sans inconvénient dans cette circonstance.

Quant aux moyens de faire ouvrir d'elles-mêmes en temps utile les portes d'amont et d'aval de l'écluse, il est intéressant de remarquer la possibilité d'employer des manœuvres pour faire cette opération, sans qu'il soit nécessaire, comme dans des essais précités, de mettre en communication non interrompue la rigole de décharge avec le bief d'aval et le petit bassin d'amont avec le bief d'amont. Ces manœuvres, reposant sur des communications alternatives avec ces biefs, pourront prochainement être étudiées; mais elles ne pourront l'être d'une manière complète que lorsqu'on aura fait des portes d'écluse neuves : ce qui ne paraît pas pouvoir être fait cette année. Il y a lieu d'espérer qu'on pourra se passer complétement des ventelles de ces portes, et ne les conserver que pour le cas où l'on aurait à faire à l'appareil quelque réparation qui obligerait de se servir momentanément du système actuellement en usage. On conçoit que si, au commencement de chaque grande oscillation finale, le sas est pendant un temps convenable en communication avec le bief qui la concerne, cela pourra permettre d'achever de remplir ou de vider le sas sans ouvrir ces ventelles, tout en permettant à l'eau contenue dans le grand tuyau de conduite de conserver la force vive nécessaire pour que les portes de l'écluse s'ouvrent d'elles-mêmes, comme cela a été expliqué ci-dessus.

Note sur un appareil à faire des épuisements au moyen des vagues de la mer;

Par M. Anatole DE CALIGNY.

J'ai présenté à la Société Philomathique de Paris, le 17 mai 1851, le principe de cet appareil. Depuis cette époque, je ne m'en étais plus occupé, parce que j'avais entendu dire que les vagues de la Méditerranée, dans les environs des marais de la Camargue, n'étaient pas assez puissantes pour être appliquées d'une manière convenable à l'épuisement de ces marais. Mais ayant appris que ces vagues étaient plus fortes qu'on ne me l'avait dit, je suis revenu sur ce sujet dans une Note présentée le 1er mars dernier à l'Académie des Sciences, et dont un Extrait est imprimé dans les *Comptes rendus* de cette Académie.

J'ai appris depuis par un article du *Journal officiel de Rome,* dont la traduction a été publiée à Paris dans le journal *l'Univers* du 3 juin 1868, et dont je n'avais pas connaissance le 1er mars dernier, que les vagues de la Méditerranée, dans les environs des marais d'Ostie, sont assez puissantes pour qu'un ingénieur italien, M. Moro, d'Arona, ait proposé dernièrement de s'en servir pour faire des épuisements dans ces marais, dont un canal souterrain qu'il a construit conduit les eaux dans la mer. M. Moro, après avoir donné la description de ce canal, fermé à ses deux extrémités par des portes pendantes, ayant pour but d'empêcher l'eau de retourner dans le marais, ajoute que de cette combinaison « il ressort une conséquence paradoxale au premier abord, mais pourtant très-certaine, naturellement parlant, à savoir que l'abaissement de l'eau dans l'émissaire se produit non-seulement au niveau moyen et le plus bas de la mer, mais dans les grandes tempêtes, notamment dans celles de *libeccio,* même au-dessous du niveau le plus bas; car on observe qu'autant la vague

s'élève au-dessus de la ligne du niveau moyen, autant elle descend au-dessous de cette ligne, et comme chaque abaissement de la mer fait sortir les eaux par l'écluse, les flaques mêmes qui se trouvent à un niveau inférieur au plus bas de la mer peuvent avoir un écoulement. »

Il n'est pas à ma connaissance que personne eût proposé avant moi de se servir d'une dénivellation provenant du mouvement des vagues pour faire des épuisements dans un marais au-dessous du niveau moyen le plus bas de la mer, en employant un clapet susceptible de s'ouvrir en vertu de cette dénivellation, et de se refermer pour empêcher l'eau de rentrer dans le marais quand elle monte au-dessus de ce niveau moyen.

On jugera si cette idée est au moins implicitement contenue dans l'extrait du procès-verbal de la séance de la Société Philomathique de Paris du 17 mai 1851, publié dans le journal *l'Institut,* et dans le *Bulletin de la Société Philomathique* de 1851, p. 27 à 29. Abstraction faite d'ailleurs de toute question de priorité, il est d'autant plus intéressant de rappeler cette Note qu'on pourra probablement, au moyen des développements qu'on trouvera plus loin, profiter du canal souterrain de M. Moro pour y adapter l'appareil que j'avais présenté, il y a dix-huit ans, de manière à faire au besoin descendre l'eau des marais d'Ostie plus bas qu'on ne le pourrait en vertu de la dénivellation des vagues abandonnées à elles-mêmes.

Il est d'ailleurs intéressant de remarquer qu'avec l'appareil de mon invention construit à l'écluse de l'Aubois, on obtient un effet utile plus grand quand il est employé comme machine pour les épuisements que lorsqu'il est employé comme machine élévatoire. Or, tous ces principes se tiennent à divers égards, et la grande expérience que je rappelle trouvera ici une de ses applications.

Voici la copie de la partie de la Note précitée qui a pour objet le système en question en forme de L.

« Séance du 17 mai 1851. Hydraulique. *Appareil à faire des épuisements au moyen des vagues de la mer.* M. de Caligny adresse une Note sur les moyens d'employer les vagues de la mer à faire des épuisements. . . . .

. . . .

» J'ai communiqué il y a longtemps à la Société, dit-il, des expériences variées sur un appareil sans piston, ni soupape, ni aucune autre pièce quelconque mobile, ayant pour but de faire des épuisements au moyen d'une diminution de pression moyenne sur l'orifice latéral d'un tuyau vertical ouvert à ses deux extrémités, dans lequel une colonne liquide oscille, en vertu d'une force motrice quelconque, même au moyen d'une addition alternative de pression supérieure, telle qu'une insufflation très-irrégulière. Je crois cependant que, pour utiliser en grand le travail moteur fourni par les vagues, dont l'action alternative agira sur l'extrémité convenablement évasée d'un tuyau de conduite en partie plongé dans la mer, il sera utile de disposer un clapet de retenue dans le tuyau latéral, partant de l'orifice latéral du tuyau vertical pour déboucher par son autre extrémité dans le marais à épuiser. Il y a d'ailleurs des époques de calme, pendant lesquelles il ne faut pas que l'eau de la mer puisse refluer vers le marais. La force, analogue à une succion, développée dans l'appareil sans soupape que j'ai fait fonctionner en présence de beaucoup de monde, n'est au reste qu'une fraction de celle qu'on peut se procurer quand il y a un clapet de retenue. Pour s'en rendre compte, il suffit de se souvenir que si une force quelconque a soulevé dans un tuyau vertical une colonne liquide au-dessus du niveau de l'eau dans lequel ce tuyau est en partie plongé, elle redescend ensuite au-dessous de ce niveau, de sorte que le clapet de retenue dont je viens de parler peut permettre à l'eau du marais d'entrer dans le tuyau vertical, où elle se mêlera à la colonne liquide oscillante et sortira en définitive par l'extrémité inférieure du tuyau vertical. Il est à peine nécessaire d'ajouter que l'extrémité inférieure de celui-ci doit être en général recourbée horizontalement, ou d'une manière convenable pour recevoir l'action des vagues par un évasement extérieur.

» Plus le tuyau venant du marais est long, plus la masse d'eau qu'il contient est grande, de manière à pouvoir emmagasiner la force vive comme un sorte de volant, de sorte que, pour certaines dispositions, le clapet, utile à divers égards, est moins nécessaire.

» Les études à faire pour appliquer ce genre d'appareils doivent avoir principalement pour objet : 1° la hauteur, la longueur et la durée des principales vagues dans la localité où l'on aura des épuise-

ments à faire; 2° la distance du rivage à laquelle il faut s'avancer pour rencontrer des vagues assez puissantes.

» Il est difficile *à priori* de tenir compte de la partie de l'action des vagues provenant de leur vitesse, en un mot de leur percussion sur la bouche évasée d'une manière analogue à un ajutage divergent. Mais on peut se former une idée de ce qui se présente pendant la durée du gonflement proprement dit sur cette extrémité. On est alors dans des circonstances analogues à ce qui se présente quand un tuyau de conduite débouche par une extrémité dans l'eau d'un bief supérieur, tandis que l'autre extrémité relevée verticalement s'élève assez haut, non-seulement pour que l'on n'ait pas à craindre que l'eau rentre par cette dernière, mais pour que l'eau qui s'y élève ne puisse pas sortir par ce sommet. Quand la vague est passée, l'extrémité d'amont est dans un état analogue à ce qui se présenterait si, par suite d'une manœuvre quelconque, elle se trouvait seulement en communication avec l'eau d'un bief inférieur. La question est compliquée par la hauteur variable de l'intumescence au-dessus de la bouche évasée, mais la comparaison précédente est utile pour bien faire comprendre l'état général de la question.

» Il semble cependant, au premier aperçu, qu'il se présente une grande difficulté pratique, la longueur du tuyau qui va à la rencontre des vagues paraissant devoir être fonction de la longueur de ces vagues. Mais, en définitive, les expériences en grand qui, je l'espère, seront prochainement faites sur ce sujet, seront bien facilitées par la considération suivante. Il résulte de mes expériences diverses sur la durée de l'oscillation de l'eau dans les tuyaux de conduite d'une longueur suffisante, que l'on est le maître de cette durée dans des limites très-étendues, pourvu que l'on puisse disposer sur le tuyau de conduite, soit horizontal, soit plus ou moins incliné, un tuyau vertical d'une section convenable. Si donc l'expérimentateur se trompait quant aux effets de la longueur du tuyau horizontal, il aurait un moyen très-simple d'y remédier.

» Quant au tuyau de conduite du marais, lorsqu'il a un bon clapet de retenue, il n'est pas utile qu'il soit très-long, puisque d'ailleurs *l'eau du marais peut être amenée par un système de canaux ou de tuyaux dans un puisard disposé à une distance convenable du tuyau vertical.*

» La vague qui fera assez osciller l'eau dans ce dernier permettra à une tranche d'eau du marais de venir se poser sur la surface de la colonne d'eau descendante ou se mêler à l'oscillation dans certaines limites. On voit que le jeu de cet appareil se rattache dans toutes ses parties à mes diverses recherches sur les oscillations des liquides, et que, s'il exige quelques études pratiques, on ne peut avoir de doutes, dans chaque application particulière, que sur le rapport de ses effets au capital dépensé pour son premier établissement et les frais insignifiants de son entretien. »

J'ai cru devoir copier la description précédente avec les fautes de rédaction qui peuvent s'y trouver. Quelques explications seront utiles pour mieux faire comprendre la manière dont on doit appliquer ces principes.

Je rappellerai d'abord au besoin que dans le tome VIII, 1re série, du *Journal de Mathématiques*, année 1843, p. 23 et suiv., j'ai publié un Mémoire intitulé : *Nouveau système de fontaines intermittentes sous-marines, théorie et modèle fonctionnant, par Anatole de Caligny, suivi d'une Note de M. Combes* [*]. On trouve dans ce Mémoire l'exposé détaillé des principes et des expériences sur lesquels repose l'appareil de mon invention rappelé au commencement de la Note précitée de 1851, et dont j'avais présenté un modèle fonctionnant à la Société Philomathique de Paris dès l'année 1840.

J'ai expliqué dans ce Mémoire de 1843 pourquoi le tube latéral qui introduit alternativement l'eau dans le système peut être d'une grande longueur, parce que le mouvement, d'ailleurs variable de l'eau qu'il contient, et qui entre dans un tube vertical (en vertu de la diminution de la moyenne des pressions sur un point donné résultant de l'état d'oscillation d'une colonne liquide), s'emmagasine dans la masse de l'eau contenue dans ce tuyau latéral d'une manière analogue à celle dont le mouvement s'emmagasine dans un volant.

On comprendra mieux, d'après cela, ce que j'ai voulu dire à la Société Philomathique en 1851, sur les effets de la longueur d'un tuyau de conduite latéral qui, *à la rigueur*, pourrait même se passer de

---

[*] M. Combes voulut bien à ma prière développer par l'analyse les principes qui font l'objet de ce Mémoire.

clapet de retenue. Il y a d'ailleurs en ce moment à la Sorbonne un modèle de ce système fonctionnant au moyen d'une force motrice irrégulière, sans aucune pièce quelconque mobile, et disposé de manière que la colonne liquide venant d'un réservoir latéral qu'on épuise peut, si l'on veut, ne point revenir en arrière à chaque période de l'appareil.

Mais, dans la pratique, il est évidemment impossible, comme cela a été dit dans la Note précitée de 1851, de se passer d'un clapet de retenue, puisque l'eau du marais à épuiser rentrerait dans ce marais quand la machine ne fonctionnerait plus à l'époque de la cessation des vagues.

Or, dès l'instant où l'on se sert d'un clapet, il faut d'abord tenir compte de ce que la baisse alternative de l'eau dans le tube vertical permet tout naturellement à l'eau du marais d'entrer dans le système, comme cela est expliqué ci-dessus. Les vagues sont d'ailleurs tellement variables qu'on saura mieux ce qu'on fera en comptant principalement sur ce résultat, et considérant plutôt comme un objet de curiosité le phénomène précité de diminution de pression latérale moyenne.

Dans ces conditions, il est intéressant de signaler plus spécialement une modification, déjà indiquée dans la Note précitée de 1851, qui assure le jeu de l'appareil, pour le cas où l'eau du marais serait amenée par un long tuyau de conduite, parce qu'il ne faut pas que l'inertie de l'eau qu'il contient arrête ce jeu.

Elle consiste dans la disposition d'un puits ou réservoir à ciel ouvert, de section convenable, communiquant d'un côté avec ce tuyau de conduite, et, de l'autre, avec une tubulure portant le clapet latéral de retenue indiqué ci-dessus pour le jeu de l'appareil.

Il sera prudent de disposer un autre clapet de retenue ayant en partie pour but d'empêcher l'eau de ce réservoir de retourner dans le marais, s'il se présentait des circonstances où cela fût possible, à cause de l'irrégularité des vagues. Mais je n'entrerai pas ici dans ces détails.

Dans le cas où l'on se proposerait seulement d'utiliser la dénivellation alternative des vagues abandonnées librement à elles-mêmes (sans qu'elles fussent obligées de faire osciller l'eau dans un tube recourbé en forme de L pour augmenter l'amplitude des oscillations), on pour-

rait disposer le réservoir dont il s'agit à l'extrémité du tuyau de conduite qui débouche dans la mer, et alors le clapet ou les clapets de retenue contre la mer, s'il en faut plusieurs, seraient sur la paroi de ce réservoir, dans la direction du tuyau de conduite, c'est-à-dire que les choses seraient combinées de manière que l'eau de ce dernier aurait à se détourner le moins possible pour entrer dans la mer.

On conçoit d'ailleurs que la pratique montrera quelle est la meilleure position de ce réservoir. On verra s'il vaut mieux, *surtout si l'on ne se sert du mouvement des vagues que dans les fortes tempêtes,* que ce réservoir (qui sera une cause de perte de force vive si la colonne liquide y entre en s'évasant et rencontre ensuite une cause de contraction en passant par les orifices de sortie) soit disposé comme je viens de le dire, ou soit disposé latéralement, si l'eau se dégorge ordinairement dans la mer par un long tuyau de conduite.

Mon but, dans ce que je viens de dire, est seulement de bien fixer les idées sur l'utilité générale de ce réservoir, quant à ce qu'il y a d'essentiel.

Il en résulte, soit pour le cas de l'appareil en forme de L, soit pour celui de l'emploi des vagues libres, que la moindre dénivellation alternative provenant du mouvement des vagues au-dessous du niveau du marais suffira pour faire ouvrir le clapet de retenue contre la mer, ou les clapets de cette extrémité, s'il en faut plusieurs, et que l'eau de ce réservoir pourra entrer dans la mer en quantité convenable pour chaque période, *parce qu'elle n'en sera point empêchée par l'inertie de la longue colonne liquide contenue en amont dans le tuyau de conduite.*

J'ai communiqué ces considérations à plusieurs de mes confrères de l'Académie Pontificale des Nuovi Lincei de Rome et à M. Moro. Je suis d'ailleurs le premier à reconnaître, d'après ce que dit le *Journal officiel de Rome* précité, le mérite que paraît avoir le travail de M. Moro, qui a eu l'idée de faire déboucher les eaux du marais dans la mer au delà et au-dessous de la région où se forme un banc de sable.

Je n'ai pas cru devoir attendre de nouveaux renseignements avant de bien préciser l'état de la question, quant aux principes de ce que je propose.

Il paraît que les grandes ondes se brisant à une distance considé-

rable de ce rivage, il sera convenable d'employer dans cette localité les moyens indiqués ci-dessus pour augmenter l'amplitude des oscillations, et que la plage est même en pente tellement douce, que rien ne devra être négligé pour profiter du peu de force que les vagues conserveront ordinairement en arrivant près de l'appareil.

Au reste, abstraction faite des applications de ce système à l'épuisement des marais, il pourra être employé à l'assainissement des ports dans les mers sans flux et reflux. On sait en effet qu'il serait utile d'avoir un moyen simple de déplacer l'eau, même sans l'élever au-dessus du niveau du port. Or il ne sera pas nécessaire d'avoir à sa disposition des vagues bien puissantes pour obtenir un déplacement d'eau très-convenable, si l'appareil objet de cette Note est assez bien disposé. C'est un des moyens qu'on aurait pu proposer sans doute pour l'assainissement du port de Marseille.

Donnons quelques détails relatifs à la manière dont sera posé le tuyau latéral. On pourra probablement diminuer la profondeur des fondations, en le faisant déboucher à l'intérieur du coude du tuyau en forme de L. Il y a même lieu d'espérer que, la pression latérale étant diminuée, comme on sait, à l'*intérieur* d'un coude arrondi, en vertu de la force centrifuge de l'eau, tandis que cette force augmente la pression contre la partie qu'on est convenu d'appeler *extérieure*, quoiqu'elle soit à l'intérieur du tuyau, cette disposition sera plus favorable à l'introduction de l'eau à épuiser dans le système que si le tuyau latéral débouchait dans la partie verticale. Il est bien entendu que ce tuyau latéral peut être recourbé de manière que son autre extrémité débouche dans l'eau à épuiser.

Quant à la position la plus convenable du clapet de retenue, j'ajouterai que, si ce clapet introduit l'eau directement par l'arrondissement intérieur du coude, c'est-à-dire par sa partie convexe relativement à la colonne liquide, il en résulte des propriétés intéressantes, surtout pour les cas où, comme on le verra plus loin, on peut supprimer le tuyau latéral.

Il sera utile d'étudier par expérience quel sera le plus petit rayon de courbure qu'on pourra donner au coude, relativement au diamètre du tuyau en forme de L. Il résulte d'observations publiées

dans ce Journal que, si l'on donne au rayon de courbure intérieure une grandeur à peu près égale à celle du diamètre du tuyau, le rayon de courbure extérieure, c'est-à-dire celui de la partie qu'on peut désigner sous le nom de *concave*, étant double, le plus essentiel est fait en général pour diminuer la résistance de l'eau dans le coude, cette courbure étant suffisante pour supprimer les phénomènes de *contraction* proprement dite.

Il se produit, en effet, un véritable phénomène de *contraction* de la veine liquide dans les coudes à angle brusque formés par les décharges latérales de certains canaux d'usine quand on pose transversalement, pour arrêter l'usine, une planche faisant partie des parois latérales du canal. En général, dans les coudes ainsi formés, l'eau s'abaisse beaucoup dans la premièré moitié de l'orifice latéral. Il est évident, d'après cela, que, si l'on considère un tuyau coudé d'une manière analogue, la pression latérale est bien moindre à certains points surtout de la partie convexe que le long des parties rectilignes du tuyau à partir de certaines distances.

Il se présente donc ici une question nouvelle. Si le rayon de courbure de la partie convexe, appelé *rayon de courbure intérieure*, est assez petit, par rapport au diamètre du tuyau, pour que les phénomènes précités de contraction de la veine liquide se produisent, il en résulte une résistance aux mouvements de l'eau dans le coude plus considérable que si ce rayon était plus grand; mais il en résulte aussi une diminution de pression latérale favorable à l'introduction de l'eau à épuiser, d'après ce qui a été dit ci-dessus.

On voit, d'après cela, qu'il est difficile de déterminer *à priori* la courbure correspondante à l'effet utile maximum de l'appareil, qui repose par conséquent sur des considérations plus délicates qu'on ne le croirait sans doute au premier aperçu.

Si, au lieu d'introduire directement l'eau à épuiser par la partie convexe du coude, comme je viens de le dire, on l'introduit directement pour diminuer encore un peu la profondeur des fondations dans la partie horizontale du tuyau, on peut, si l'on n'a point à craindre les engorgements, réduire à zéro le rayon de courbure de la partie convexe du coude.

Mes expériences établissent, en effet, qu'au moyen de lames con-

centriques on diminue considérablement la résistance de l'eau dans un coude à angle droit brusque, dont le rayon de courbure extérieure est égal au diamètre du tuyau, le rayon de courbure intérieure étant nul.

On peut voir ce que j'ai dit de ce phénomène dans le tome VII, 2e série, année 1862, du *Journal de Mathématiques;* dans un Mémoire intitulé : *Expériences sur une machine hydraulique à tube oscillant, etc.;* dans un chapitre intitulé : *Expériences sur un moyen nouveau de diminuer la résistance dans les coudes.*

On voit que les phénomènes sur lesquels repose le jeu de cet appareil varient selon les circonstances. Si, par exemple, on supprimait les lames concentriques dans un coude à angle droit brusque, il serait difficile *à priori* de déterminer rigoureusement l'emplacement de la chambre du clapet latéral, dans le cas où celui-ci introduirait directement l'eau à épuiser dans la partie horizontale. En effet, la veine liquide, après s'être amincie dans le coude (quant à la partie qui fait passer le plus d'eau), se dilate ensuite en exerçant une percussion contre la colonne liquide rectiligne, ainsi que cela se voit dans des canaux d'usine coudés, découverts à leur partie supérieure. Or, on ne sait pas encore assez bien à quelle distance du coude, dans chaque circonstance donnée, se fait sentir la pression maximum provenant de cette percussion; de sorte que l'expérience seule peut décider en dernier ressort le choix rigoureux de l'emplacement du clapet.

On peut demander lequel vaut le mieux : de disposer le tube vertical dans la mer, ou dans le puisard en communication avec le marais qu'on veut épuiser?

Je crois qu'en général il vaudra mieux le mettre dans le puisard, non-seulement parce que l'appareil sera plus facile à visiter et à consolider relativement au choc des vagues, mais parce que le clapet n'aura pas besoin de tuyau latéral, étant seulement dans une chambre entourée de surfaces disposées de manière à diminuer autant que possible la *contraction* de la veine liquide à son entrée du puisard dans le système.

Si d'ailleurs le tuyau vertical était dans la mer, la chambre du clapet, quelle que fût sa position la meilleure dans chaque circonstance donnée, pourrait être mise en communication avec le puisard au moyen d'un tuyau latéral convenablement recourbé.

On conçoit que le choix de la position du tube vertical dépendra de la nature des vagues ordinaires dans chaque localité; ainsi il peut arriver qu'il y ait de l'avantage à mettre l'appareil le plus possible dans la mer, afin de mieux recevoir l'action des vagues.

La théorie de l'appareil est plus difficile dans cette hypothèse que dans l'autre, à cause de la longueur du tuyau latéral, tandis que dans l'autre cas, le clapet n'ayant qu'une simple chambre, l'inertie de l'eau du puisard ne donne lieu à aucune difficulté pratique.

Dans l'un et l'autre cas, il faut tenir compte, lorsque l'eau à épuiser entre dans le système, de ce qu'elle peut être obligée de se faire de la place dans la colonne liquide oscillante. Comme elle n'y entrera sans doute en quantité importante qu'à partir de l'époque où le niveau de cette dernière sera très-notablement baissé, ce sera surtout quant à la colonne liquide verticale qu'il sera intéressant d'étudier les effets de cette introduction qui tendront à y modifier les vitesses.

Aux divers effets signalés dans cette Note et dans celle dont elle est la suite, il faut joindre ceux de la communication latérale du mouvement des liquides. J'ai publié dans le *Journal de Mathématiques*, en 1843, un Mémoire sur les Fontaines intermittentes sous-marines, où je signalais d'ailleurs l'action de ce phénomène et de quelques autres dans une circonstance semblable.

Il est à peine nécessaire d'ajouter que, s'il est intéressant pour la science et pour l'étude, au moins théorique, de l'effet utile maximum de l'appareil, de tenir compte de diverses circonstances délicates, il suffit de supposer que l'eau à épuiser puisse suivre, dans certains cas, la colonne liquide descendante dans le système, pour comprendre l'utilité de son jeu.

L'expérience montrera d'ailleurs si ce dernier mode d'introduction de l'eau à épuiser ne sera pas en général le plus important pour cet appareil.

On conçoit que, si, pour éviter la profondeur des fondations, on dispose le clapet assez peu au-dessous du niveau de l'eau à épuiser, et si celui-ci est en général assez peu au-dessous du niveau moyen (c'est-à-dire abstraction faite des vagues qui font marcher l'appareil), le plus bas d'une mer sans flux et reflux, il y a lieu de penser que, dans bien des cas, l'eau oscillera dans le tuyau vertical de l'appareil

en forme de L, de manière à s'élever bien au-dessus de ce clapet, et par conséquent tendrait à redescendre bien au-dessous s'il n'entrait pas de l'eau à épuiser; de sorte que l'effet de l'introduction de l'eau à épuiser par ce clapet se fera dans bien des cas, peut-être principalement, comme on vient de le supposer dans cette Note, pour fixer les idées d'une manière simple sur l'utilité pratique de cet appareil.

J'ai appris que M. Moro avait accueilli mes communications avec bienveillance et se disposerait même à faire les expériences que je lui ai indiquées.

Il ne paraît pas d'ailleurs qu'il soit nécessaire dans cette localité d'établir le réservoir latéral que j'ai proposé pour le cas où le tuyau de conduite qui amène l'eau du marais dans la mer aurait une longueur dépassant certaines limites. J'apprends, en effet, que d'après des expériences mentionnées au commencement de cette Note, déjà faites par M. Moro, les clapets s'ouvrent facilement d'eux-mêmes quand les vagues s'abaissent convenablement auprès de l'appareil à chaque période d'ondulation, quoiqu'il n'y ait point de réservoir latéral.

Cette circonstance semble indiquer que la longueur du tuyau de conduite dont il s'agit, étant beaucoup moindre qu'on ne pouvait le croire d'après les indications sommaires du *Journal officiel de Rome* précité, serait en proportion convenable, relativement aux effets que doivent produire les vagues ordinaires, pour qu'on puisse essayer de se servir du tuyau existant, afin de faire un premier essai de la manière d'augmenter l'amplitude des oscillations, comme je le propose.

On pourra probablement s'en servir pour étudier le système, au moins provisoirement, sous une forme différente de celles qui sont indiquées ci-dessus et qui, quoique paraissant peut-être moins rationnelle, peut aussi avoir ses avantages.

Si, près du clapet qui est dans le marais, on dispose sur le tuyau de conduite le tube vertical, en tenant ouvert d'une manière continue l'autre clapet qui est dans la mer, cela constituera une des formes générales de l'appareil dont il s'agit, parce qu'on pourra y ajouter ensuite, du côté de la mer, l'ajutage divergent.

Il est à remarquer que l'eau du marais entrera dans le système sans que la veine liquide soit obligée de se plier dans un coude. Cet avan-

tage sera d'ailleurs peut-être plus que compensé par la résistance du coude à angle brusque formé par le mode de jonction du tube vertical avec le tuyau de conduite.

Le tuyau que je désigne ici sous le nom de *vertical*, parce que cela rend la construction plus simple, pourra plus tard être étudié sous une autre forme. L'expérience seule pourra décider s'il ne vaudra pas mieux que du moins sa partie inférieure soit inclinée au moyen d'une sorte de coude arrondi ou au moyen de lames concentriques, de manière que la colonne oscillante n'ait pas à se plier aussi brusquement. Mais, à cause de l'espèce d'*éperon* qui se présenterait alors, l'étude du phénomène est compliquée.

Quoi qu'il en soit, il résultera de cette disposition générale que la force centrifuge s'opposera pendant une partie de l'opération à l'entrée alternative de l'eau du marais dans le système, tandis que j'ai montré comment on pourrait profiter de cette force pour favoriser l'introduction de cette eau. Mais l'appareil, sous cette forme, se prêterait facilement à l'écoulement continu de l'eau du marais dans la mer aux époques où l'on ne se servirait pas des oscillations des vagues. Celles-ci, avant la pose du tuyau vertical, ne peuvent servir que par certains vents à faire des épuisements un peu au-dessous du niveau *moyen* le plus bas de la mer (c'est-à-dire considéré abstraction faite des vagues dont on se sert). On m'écrit que, dans ces conditions, l'expérience a bien réussi.

Il est d'ailleurs intéressant de remarquer que, si toute la colonne verticale descendante entrait à chaque période dans le tuyau horizontal, la colonne liquide en mouvement, à partir de cette époque, agirait plus directement sur l'eau à épuiser, qui la suivrait dans un tuyau rectiligne à peu près comme si elle suivait un piston.

Il est utile que l'extrémité du tuyau de conduite qui débouche dans la mer y soit assez enfoncée pour que les vagues ne la découvrent pas de façon à y introduire de l'air. Je ne sais pas encore si, dans l'état actuel des choses, cette extrémité est assez enfoncée sous l'eau pour que cette condition puisse être remplie sans qu'on ait aucune modification à y faire. Peut-être même, si les clapets s'ouvrent facilement sans réservoir latéral, cela vient-il de ce que le tuyau ne coulerait pas toujours entièrement plein. On conçoit que, si une vague laisse un

creux devant le clapet qui est dans la mer, il peut s'introduire de l'air par une charnière supérieure, dans le cas où ce creux découvrirait un peu cette charnière. Alors ce clapet n'aurait pas besoin, pour s'ouvrir, de mettre en mouvement toute l'eau contenue dans le tuyau de conduite, et cette eau pourrait ensuite avoir le temps d'acquérir une certaine vitesse, en vertu de la baisse qui se serait produite ainsi à son extrémité du côté de la mer. Mais j'ai lieu de croire que M. Moro a déjà pensé à la possibilité de cette introduction de l'air, et que cela ne s'opposera pas aux essais dont il s'agit.

Quoi qu'il en soit, si l'on ajoute à l'extrémité d'un tuyau de conduite convenablement enfoncée dans la mer un ajutage divergent, l'entrée de l'air dans cet ajutage, qui s'élèverait en partie par son évasement au-dessus du tuyau, n'aurait pas le même inconvénient si cet air n'entrait pas dans ce tuyau.

On pourra au besoin ne faire l'évasement que dans le sens horizontal, comme à l'extrémité du tuyau de conduite de l'écluse de l'Aubois, qui débouche dans le sas. Cet ajutage n'a pas seulement pour but de mieux recevoir la percussion des vagues, mais d'utiliser la vitesse de sortie de l'eau dans la mer, de façon à faire descendre l'eau le plus bas possible dans le tube vertical. La colonne liquide, s'évasant graduellement, emploiera sa force vive d'autant mieux que l'évasement se fera d'une manière plus insensible. Il y aura même lieu d'examiner s'il ne vaudra pas mieux que la partie plongée du tuyau soit toujours *entièrement conique,* de manière à rendre l'évasement aussi insensible que cela se pourra. Cette forme permettrait d'ailleurs, quand on serait dans un espace resserré, à cause d'un banc de sable par exemple, de régler plus facilement dans certaines circonstances la durée que devrait avoir autant que possible chaque oscillation. Dans les cas où l'amplitude ordinaire de l'oscillation sera assez petite par rapport à la longueur de la partie plongée du tuyau, l'évasement aura moins d'importance, relativement à ce qui vient d'être dit quant à la baisse de la colonne oscillante, que dans le cas contraire; et il pourra arriver qu'on ait surtout à se préoccuper de cet évasement pour mieux recevoir la percussion des vagues, en diminuant d'ailleurs aussi la *contraction* de la veine liquide à son entrée de la mer dans le système.

Ainsi que je le prévoyais en écrivant le commencement de cette Note, M. Moro a été le premier à convenir que l'appareil dont il se sert pour faire descendre, au moyen de la baisse alternative des vagues, l'eau des marais d'Ostie au-dessous du *niveau moyen le plus bas de la mer*, est semblable à celui que j'ai décrit dans ma Note précitée de 1851. Il fait observer d'ailleurs que j'ai proposé d'employer le choc des vagues, tandis qu'il dispose des surfaces, ayant pour but d'éviter ce choc près de l'appareil, sans que cela empêche la dénivellation alternative des vagues en vertu de laquelle des clapets s'ouvrent alternativement pour faire entrer l'eau du marais dans la mer.

Je ferai remarquer, à cette occasion, que les effets indiqués dans ma Note de 1851 se divisent en deux parties. Les uns dépendent du choc des vagues; les autres dépendent des effets de leur intumescence suivie de creux, et sont très-distincts des phénomènes de la percussion proprement dite.

La disposition déjà employée par M. Moro me fait espérer qu'il ne sera pas impossible d'étudier d'abord séparément les effets dont je viens de parler, si toutefois les surfaces servant de *brise-lames* ne sont pas trop près de l'appareil.

Quoique le tuyau de conduite soit beaucoup moins long que je ne le croyais, d'après quelques mots du *Journal officiel de Rome*, quand j'ai écrit le commencement de la présente Note [*], il a encore probablement trop de longueur par rapport à celle des vagues prises de crête en crête, pour qu'on puisse essayer de faire, avec ce même tuyau, une *accumulation d'oscillations* dont il est, dans tous les cas, intéressant de signaler, *comme principe*, la possibilité, surtout dans le *Journal de Mathématiques*.

On conçoit que si le tuyau était assez court, et n'avait qu'un diamètre ne dépassant pas certaines limites, une vague, si elle était assez longue, pourrait avoir le temps, même abstraction faite de sa percussion, d'agir sur le tuyau en forme de L d'une manière analogue à celle de la pression d'un réservoir dont le niveau serait plus élevé que le *niveau*

---

[*] Il peut être utile de remarquer que cette Note a été écrite à plusieurs reprises : j'ai reçu divers renseignements successivement, depuis l'impression des premières pages.

moyen de la mer à l'instant considéré. Par conséquent, si dans la partie verticale de ce tuyau le liquide se trouve à un niveau qui ne soit pas d'abord au-dessus de ce *niveau moyen*, il en résultera une oscillation au-dessus de ce dernier, et il y a même des raisons de penser que cette oscillation montera au-dessus du sommet de la vague, considérée ainsi comme une sorte de réservoir moteur alternatif.

Quoi qu'il en soit, si les choses sont disposées de manière que l'oscillation descendante qui se produira ensuite dans le tuyau vertical puisse profiter du moment où la vague sera descendue au-dessous du niveau moyen de la mer à l'époque considérée, on conçoit que cette oscillation, si le tube vertical est enfoncé assez profondément, pourra descendre au-dessous du creux de la vague : ce creux pouvant être alors considéré comme jouant alternativement le rôle d'un *bief inférieur* avec lequel le système serait mis en communication alternative.

L'intumescence suivante trouvera l'eau dans le tube vertical plus bas que la précédente ne l'y avait trouvée, et par conséquent l'oscillation ascendante pourra s'élever plus haut dans le tube vertical. On conçoit que, par suite de ce surcroît d'élévation, l'eau pourra descendre encore plus bas dans ce tube, et qu'il est même difficile d'assigner *à priori* la limite des oscillations successives qu'il sera possible d'obtenir ainsi au moyen de ce que j'appelle *une accumulation d'oscillations*.

Je conviens que l'expérience est absolument indispensable pour qu'on puisse se rendre compte, dans une localité donnée, de l'effet que peut avoir *cette accumulation*. Aussi je compte plutôt, *quant à la pratique*, sur les résultats de la percussion qui pourront d'ailleurs aussi conduire à une *accumulation d'oscillations*, par suite des combinaisons possibles des oscillations descendantes avec les creux alternatifs des vagues. Mais, si ces combinaisons conduisent à des effets curieux, l'appareil n'en serait pas moins utile, quand même ces derniers ne se réaliseraient pas d'une manière pratique.

La profondeur à laquelle on peut faire des épuisements dépendant de la hauteur à laquelle on peut faire monter l'eau par les oscillations dans le tube vertical, sera sans doute d'autant plus grande que la bouche qui recevra la percussion des vagues pourra elle-même être plus considérable par rapport à la section du tuyau. L'expérience seule pourra montrer dans quelles limites il faudra se restreindre pour des

vagues d'une force donnée, car il y aura là un véritable coup de bélier.

Il est intéressant de remarquer qu'en commençant l'évasement à partir du coude, on aura non-seulement l'avantage d'une augmentation de sections, par degrés plus insensibles, mais que la percussion des vagues s'exercera, toutes choses égales d'ailleurs, d'une façon plus convenable, à cause de la manière dont le mouvement se propagera. On conçoit que les sections augmentant alors graduellement à partir du coude, chaque tranche d'eau aura à prendre moins de vitesse pour que l'eau dans le coude ait une vitesse donnée, que si les sections étaient seulement égales à celle du tuyau vertical sur une plus grande longueur.

Mais sans entrer ici dans les détails théoriques auxquels donne lieu l'examen des effets d'un tube plongé, évasé graduellement d'une extrémité à l'autre, il est intéressant de rappeler qu'il résulte de mes anciennes expériences sur des sujets analogues, que, toutes choses égales d'ailleurs, chaque oscillation de l'eau dans un tuyau de conduite de ce genre a une durée moindre si le tuyau plongé s'évase ainsi, que s'il conservait un diamètre égal à celui de la partie verticale. En un mot, les choses se passent, quant à la durée de chaque oscillation, comme si la partie plongée avait alors une longueur moindre que dans le cas où le diamètre serait partout le même.

Il résulte de cette propriété, que la possibilité d'évaser ainsi la partie plongée du tuyau donnera d'ailleurs plus de facilité pour remplir les conditions du système dans les circonstances où l'on sera obligé d'avoir un tuyau d'une longueur déterminée, trop grande pour pouvoir être combinée d'une manière convenable, sans cela, avec les effets que les vagues devront produire en général sur l'appareil dans la localité où l'on se trouvera.

J'ai dit quelques mots des effets de la contraction de la veine liquide à son entrée de la mer dans le tuyau. Il est à peine nécessaire d'ajouter, d'après ce que j'ai exposé ci-dessus, que, pour s'en rendre compte, il faut distinguer des effets de la percussion ceux de la pression latérale de l'intumescence des vagues.

On conçoit, d'ailleurs, que si pour mieux recevoir la percussion, tout en consolidant la bouche évasée, on dispose un rebord autour de

celle-ci, la direction des filets liquides, en supposant même qu'elle fût d'une manière générale parallèle à l'axe, pourrait éprouver une assez forte déviation aux bords extérieurs.

Nota. — Il n'est pas nécessaire d'avoir plusieurs tubes verticaux de rechange pour déterminer par le tâtonnement la section du tube vertical, relativement aux dimensions de la partie horizontale du tuyau en forme de L, afin que les durées des oscillations soient en général convenables par rapport à celles des dénivellations alternatives des vagues. On peut y suppléer au moyen de plusieurs cylindres verticaux que l'on essayera successivement de manière à déterminer la section qui doit rester libre dans le tube vertical. Quand cette détermination sera faite, ce qu'il y aura de plus simple sera d'employer pour cela, non un cylindre circulaire, mais une portion d'un cylindre de ce genre, le reste ayant été retranché par un plan, ou plutôt en général par une surface cylindrique verticale dont la forme est à étudier par l'expérience. Il y a du reste lieu de penser que la partie du tube vertical qui est du côté du marais, et qui devra rester libre (l'autre partie étant occupée par ce demi-cylindre ou par cette portion quelconque de cylindre), devra avoir une section s'approchant beaucoup plus d'une forme rectangulaire que d'un segment de cercle, parce qu'il faut, du moins si le coude n'est pas arrondi, que la veine liquide ait le plus de liberté possible pour se jeter en se courbant dans la partie du tube vertical qui est opposée à la mer, c'est-à-dire qui est du côté du marais. Quelle que soit d'ailleurs la forme qui sera adoptée pour la pièce verticale fixe servant d'*obturateur partiel*, son extrémité inférieure devra être disposée de manière à gêner le moins possible le mouvement de l'eau qui montera alternativement dans le tube vertical. Si l'on emploie, par exemple, une forme analogue à celle d'un demi-cylindre, il est à peine nécessaire d'avertir que la partie inférieure de celui-ci devra être disposée en biseau dont les formes seront convenablement arrondies. Mais je n'entrerai pas ici dans ces détails qui ne peuvent être étudiés que par l'expérience. Il est facile de voir comment ils pourraient être appliqués au *tube d'aval* de l'écluse de l'Aubois.

Dernières expériences faites à l'écluse de l'Aubois.

On a exhaussé le tube mobile d'aval et sa cheminée en maçonnerie, parce que, le bief d'amont étant extrêmement court, il y avait de si grandes variations dans son niveau, que les petits corps flottants s'introduisaient quelquefois entre ce tube et cette cheminée, ce qui embarrassait le jeu de la machine. On aurait peut-être pu obvier à cet inconvénient au moyen de grillages à mailles plus fines; mais il ne paraît pas, d'après les essais faits jusqu'à présent, que cet exhaussement diminue sensiblement l'effet utile pendant la vidange de l'écluse. Il est d'ailleurs évident que cela ne peut avoir aucune influence fâcheuse sur l'opération du remplissage qui se fait par la partie inférieure des tubes mobiles.

On conçoit que si pendant la vidange l'eau relevée monte un peu plus haut, à cause de cet exhaussement d'un des tubes, la plus grande partie jaillissant d'ailleurs alors par le sommet de l'autre tube, il faut tenir compte de ce que le tube d'amont a un siége sous lequel est disposé un coude arrondi, tandis que le siége du tube d'aval a un coude à angle droit brusque dans la construction adoptée à l'Aubois.

Par suite de circonstances imprévues, il n'a pas été possible pendant le chômage de disposer l'anneau du tube d'aval à l'intérieur de ce tube comme je l'avais demandé; de sorte qu'on est obligé d'ajourner les expériences sur la marche automatique de ce tube. Heureusement la marche automatique du tube d'aval a déjà été étudiée à Saint-Lô et à Chaillot; de sorte qu'aujourd'hui la question est très-avancée, même quant à la marche automatique.

L'expérience établit d'ailleurs que le joint du tube d'amont, dont l'anneau est disposé comme il doit l'être, garde l'eau convenablement, même sans qu'on soit obligé d'essayer d'autres systèmes de joints qui auraient pu être mis en usage.

J'ai dit, quant à la manière de faire retomber, sans le secours de l'éclusier, le tube d'aval pendant l'époque du remplissage de l'écluse, qu'on pourrait employer d'autres moyens que celui qui est indiqué dans la Note à laquelle celle-ci fait suite. Voici le principe d'un de ces moyens.

Je ne rappellerai pas ici les détails des moteurs hydrauliques *à flotteur* qui peuvent être employés à cet usage, au moyen de la chute d'eau, soit en agissant de bas en haut, soit en agissant de haut en bas, selon que l'expérience montrera qu'il sera plus avantageux d'agir d'un côté ou de l'autre de l'axe du balancier. Je dirai seulement un mot d'un régulateur qui permettra de faire agir ce moteur en temps utile au moyen d'un système de déclics.

Il suffit de concevoir qu'à chaque période l'appareil de remplissage de l'écluse fait monter l'eau dans le sas, de quantités assez grandes pour qu'un *flotteur particulier* ayant seulement pour but de servir de *régulateur* puisse faire fonctionner convenablement un système de déclics, dans les détails duquel je n'entrerai pas ici.

Les portes d'écluse n'ont pu être remplacées au dernier chômage; elles le seront au prochain chômage par des portes en fer, et alors il sera facile d'achever plus rigoureusement et dans tous leurs détails les études sur les diverses parties de cet appareil.

Sur la forme ternaire
$x^2 + 2y^2 + 3z^2$;

Par M. J. LIOUVILLE.

Soit m un entier donné, impair et premier à 3, de façon que l'on ait

$$m = 6\mu \pm 1.$$

On demande une expression simple du nombre N des représentations de m sous la forme ternaire indiquée

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2,$$

c'est-à-dire du nombre N des solutions que l'équation indéterminée

$$m = x^2 + 2y^2 + 3z^2$$

comporte quand on admet pour x, y, z des valeurs entières quelconques, positives, nulles ou négatives.

Or, je trouve que l'on a toujours

$$\mathrm{N} = F(6m),$$

en désignant généralement, comme d'ordinaire, par

$$F(k)$$

le nombre des formes quadratiques binaires et impaires (primitives ou non, mais distinctes) de déterminant $-k$. Au surplus, le mot *impaires* pourrait être supprimé ici; car, dans le cas présent, il n'y a lieu qu'à de telles formes.

La démonstration du théorème que je viens d'énoncer n'est pas difficile. Pour le moment, toutefois, je me bornerai à vérifier ma formule sur deux exemples, tirés des plus petits entiers qu'on puisse employer après l'unité, savoir $m = 5$, puis $m = 7$.

Pour $m = 5$, la formule indiquée donne

$$N = F(30) = 4,$$

résultat exact, en vertu de l'identité

$$5 = 0^2 + 2(\pm 1)^2 + 3(\pm 1)^2.$$

Pour $m = 7$, elle fournit ensuite

$$N = F(42) = 4,$$

et cela s'accorde avec l'identité

$$7 = (\pm 2)^2 + 2 \times 0^2 + 3(\pm 1)^2.$$

Il serait inutile de pousser plus loin ces calculs.

Mémoire sur les bases de la théorie du régime uniforme des courants liquides [*];

Par M. P. BOILEAU.

1. Les notions dues à Pitot, Couplet, Bossut, de Chézy, du Buat et Coulomb ont été judicieusement utilisées par Prony et ses successeurs, pour les besoins de la pratique, mais on n'en a pas, jusqu'à présent, déduit de lois exactes; en outre, le degré d'approximation des formules en usage n'est pas toujours suffisant, même entre les limites des expériences qui en ont fourni les facteurs numériques. Aux premières notions, Navier a ajouté une expression de la résistance intérieure au mouvement relatif de deux filets liquides immédiatement voisins, et l'hypothèse que cette expression représente semblait justifiée par la distribution des vitesses dans les canaux [**], mais les observations concernant les tuyaux de conduite [***] ont fait reconnaître qu'elle n'est pas applicable aux courants qui les remplissent.

2. Ces imperfections conduisent à examiner le principe fondamental des anciennes théories du régime uniforme, c'est-à-dire la notion de l'équilibre permanent entre la gravité et les résistances intérieures : lorsque avec Bossut et du Buat on assimile les courants à des solides glissant sur des surfaces inclinées, ou lorsque avec des auteurs modernes on les considère comme composés de couches infiniment minces glis-

[*] Les notions théoriques et expérimentales exposées dans ce travail ont fait l'objet d'un Mémoire présenté en 1868 à l'Académie des Sciences (*voir* les *Comptes rendus*, t. LXVII).

[**] *Voir* les savantes recherches analytiques de M. Sonnet publiées en 1845, travail qui présente le développement et des applications de la théorie générale de Navier.

[***] *Recherches expérimentales relatives au mouvement de l'eau dans les tuyaux*, par H. Darcy (Paris, 1857).

sant à la manière des solides les unes sur les autres, les actions intérieures se réduisent à des frottements parallèles au mouvement de translation, en sorte que l'équilibre permanent de ces frottements et des composantes de la gravité parallèles à la même direction, est une condition nécessaire de la constance des vitesses; mais l'étude des phénomènes suggère des conceptions moins simples : elle conduit à regarder les liquides comme composés de particules ou petites masses séparées par des intervalles, mobiles en tous sens, et soumises aux lois de l'attraction universelle, de l'action du calorique latent et de la viscosité. Dans un semblable système, les forces intermoléculaires agissent suivant des lignes joignant entre eux, soit les centres, soit les pôles [*] des éléments matériels des courants, et leur intensité diminue à mesure que les distances réciproques de ces éléments augmentent; or, dans les courants à pente uniforme que l'on considère, les composantes de la gravité, soit dans la direction du mouvement de transport, soit normalement à cette direction, sont constantes, et, par conséquent, l'équilibre permanent dont il s'agit exigerait que, pour chaque particule fluide, celles de la résultante des actions mutuelles fussent également constantes. Cela posé, en remarquant que les distances intermoléculaires δ varient continuellement par suite de la différence des vitesses des filets liquides, et que les angles α des directions des actions mutuelles $f(\delta)$ avec le mouvement de transport diminuent quand ces distances augmentent, on voit que les composantes normales $f(\delta)\sin\alpha$, sont nécessairement variables, et l'on reconnaît qu'il est impossible d'admettre qu'elles produisent une action constante sur chaque particule liquide sans faire l'hypothèse, purement arbitraire, d'une compensation entre les effets des variations des distances de cette particule à celles qui l'environnent dans une sphère d'activité dont on ignore l'étendue. Quant aux composantes parallèles au courant, l'hypothèse de la constance de la somme algébrique de leurs valeurs dans cette étendue paraîtrait moins difficilement admis-

---

[*] *Voir* la note de la page 209 du *Traité de la Mesure des eaux Courantes*, publié au commencement de l'année 1854, ouvrage qui contient la plupart des résultats des recherches que j'avais effectuées de l'année 1845 à l'année 1852. Interrompues par les obligations du service militaire, ces recherches n'ont pu être reprises qu'en 1866.

sible, mais, pour l'équilibre permanent, il serait encore nécessaire de supposer arbitrairement une loi de l'influence de la pente du courant sur l'intensité des actions mutuelles des filets liquides. L'hypothèse précitée de Navier conduirait à considérer la vitesse relative de ces filets comme proportionnelle à la pente, tandis que les résultats d'observation s'accordent entre eux pour montrer qu'elle est proportionnelle à la racine carrée de cette pente, toutes choses étant égales d'ailleurs.

3. La notion de la constance de la vitesse sur une trajectoire parallèle aux parois, qui a donné lieu à celle de l'équilibre des forces, n'est elle-même qu'une hypothèse, car les instruments d'observation qui ont été employés ne fournissaient que de moyennes vitesses de transport : ainsi, les indications des moulinets sont relatives au chemin total parcouru par les particules liquides dans un temps déterminé; l'inertie de leurs pièces rotatives ne leur permettrait pas d'ailleurs d'obéir à des variations de courte durée : celle de la masse des flotteurs et l'action latérale du fluide sont également des obstacles à une parfaite précision; dans l'usage du tube de Pitot ou des appareils analogues, on prend la hauteur moyenne des colonnes indicatrices, etc.

4. Les oscillations continuelles de ces colonnes liquides, qui se produisent dans les courants les mieux réglés, eussent dû faire naître l'idée de la *périodicité* des vitesses, propriété des fluides en mouvement qui ressort d'un grand nombre de faits; ainsi, les variations de la hauteur des jets d'eau ont été depuis longtemps remarquées, et elles se produisent sous des inclinaisons diverses, lors même que ces jets sont alimentés, comme à Versailles, par de vastes réservoirs : Savart a constaté en 1833 la périodicité de l'écoulement par des orifices circulaires sous une charge constante; dans mes expériences de l'année 1845, où j'employais un nouvel hydrodynamomètre, sorte de balance à ressort qui avait été douée d'une grande sensibilité, le levier transmettant les impulsions d'un courant établi dans les conditions du régime uniforme, exécutait un double système d'oscillations d'autant plus rapides que la vitesse du fluide était plus considérable. En ce qui concerne les rivières, il y a lieu de rappeler ici qu'en l'absence de toute agitation de l'atmosphère ou d'autres causes perturbatrices, j'ai remarqué, dans

le bruit des chutes par-dessus une digue, des accroissements et affaiblissements alternatifs réguliers [*]; postérieurement, dans des investigations effectuées sur le fleuve du Mississipi par une Commission composée d'ingénieurs militaires et de professeurs distingués des États-Unis, la périodicité du mouvement de transport s'est trouvée assez sensible pour être décelée par la marche des flotteurs.

5. La considération des *forces vives latentes* nous fournira de nouveaux motifs pour l'abandon des anciennes bases de la théorie, mais il convient d'examiner préalablement les phénomènes qui se produisent au contact des parois. On a jusqu'à présent admis qu'il existe entre ces surfaces solides et les liquides une adhérence naturelle, et l'on a même maintenu, dans de récents écrits, l'opinion ancienne que les molécules en contact avec les parois des canaux et des tuyaux de tout genre sont entièrement fixées par l'attraction; c'est encore une hypothèse arbitraire, car le liquide intérieur exerce sur les mêmes molécules une attraction en sens inverse; on peut d'ailleurs se convaincre, par l'expérience suivante, que l'adhérence n'est pas un fait constant. Les deux moitiés d'un tube en verre de $0^{m},011$ environ de diamètre ayant été séparées, je les ai insérées aux extrémités d'un long tuyau en caoutchouc vulcanisé, puis elles ont été rapprochées jusqu'au contact de deux génératrices extérieures, liées entre elles et suspendues verticalement contre un mur : cet appareil a été rempli d'eau, de manière à former une colonne continue et recourbée inférieurement, d'une longueur égale à 380 fois son diamètre moyen ; lorsque le liquide était parvenu à l'état d'immobilité, je suspendais au-dessus de l'un des deux tubes en verre un fragment triangulaire de papier buvard dont la pointe était immergée de manière à produire une succion lente; il s'établissait alors, entre les sommets des deux colonnes liquides, une différence de niveau très-faible, mais sensible; puis, lorsque le papier étant ou enlevé ou saturé, le mouvement du liquide cessait, l'égalité de niveau se rétablissait. Pour compléter l'étude de la question de l'adhérence

[*] Cette observation doit être faite dans le calme de la nuit, et à une distance assez grande pour que les chocs de la partie inférieure de la chute ne produisent pas des perceptions confuses.

au sujet de laquelle mes expériences sur les nappes liquides des barrages-déversoirs avaient fourni, dès l'année 1846, quelques données nouvelles, j'ai fait plus récemment les observations suivantes sur une veine d'eau sortant d'un petit orifice pratiqué dans la paroi verticale mince d'un vase quadrangulaire dans lequel le niveau du liquide s'abaissait très-lentement. 1° A partir d'une certaine valeur de la charge sur le centre de l'orifice, valeur qui s'est trouvée de 40 millimètres pour un diamètre d'un millimètre et demi, la trajectoire parabolique de la veine liquide se déforme; sa partie descendante devient d'abord verticale, puis, n'étant plus qu'à une petite distance du sommet de l'angle de la paroi verticale du réservoir et de son fond posé horizontalement sur deux supports, cette partie de la veine prend une inflexion rentrante qui se prononce de plus en plus à mesure que le niveau baisse dans le réservoir; bientôt elle vient rencontrer l'arête de l'angle précité, et, à ce moment, elle s'applique rapidement sur la paroi verticale jusqu'à l'orifice. 2° La hauteur du niveau intérieur continuant à diminuer, l'angle aigu que le jet liquide fait avec la surface extérieure horizontale du fond du vase diminue progressivement ; puis le liquide vient s'appliquer le long de cette surface, où il forme un courant suspendu contrairement à l'action de la pesanteur : ce courant était le plus souvent terminé par une petite masse arrondie d'où le liquide tombait goutte à goutte, et alors, vers le point où il atteignait ce renflement, il s'amincissait, ce qui indique une accélération. 3° Si, sous la partie d'amont du même courant, on place un récipient que l'on remplit lentement d'eau jusqu'à le faire déborder, au moment où le liquide de ce récipient vient en contact avec le premier, la partie d'aval du courant disparaît. 4° Lorsque, ce courant étant libre, on bouche l'orifice d'écoulement, le liquide dont il se compose tombe immédiatement.

L'inflexion que le jet subit lorsqu'il ne se trouve plus qu'à une petite distance de la paroi verticale du vase peut être attribuée à diverses causes, et notamment à une attraction d'électricités [*], mais

[*] On sait que l'écoulement de la vapeur d'eau par un orifice ouvert dans la paroi d'un générateur électrise en signes contraires cette paroi et la veine fluide; or l'illustre Faraday a constaté que ce phénomène est dû au frottement de l'eau entraînée à l'état liquide sur les bords de l'orifice.

nous nous occuperons seulement ici de la question de l'adhérence : la troisième expérience indique que l'action mutuelle des molécules d'eau était supérieure à celle de la paroi solide et du liquide, bien que la surface de contact fût plus grande pour cette dernière action que pour la première, ce qui ne permet guère de croire à une adhérence due à l'attraction des parois dans les canaux et les tuyaux de conduite; on peut concevoir une action retardatrice provenant de l'introduction du liquide dans les pores de certaines parois, mais c'est la cohésion qui serait en jeu. Pour expliquer les phénomènes de la deuxième et de la quatrième expérience, je rappellerai que dans mes observations sur les déversoirs, où de grandes nappes liquides de 120 millimètres d'épaisseur, au lieu de former un jet parabolique, s'appliquaient sur le sommet à arêtes vives et sur la face verticale d'aval du barrage, lorsque l'on plongeait jusqu'à ce barrage une tige solide quelconque, l'air extérieur se précipitait sous la nappe qui se détachait brusquement; cette expérience prouve qu'il se produit une diminution de pression dans les couches fluides en mouvement sur des surfaces solides, diminution qui cesse d'avoir lieu, d'après ce qui précède, en même temps que le mouvement, et l'on voit que le phénomène de l'application des nappes ou des jets liquides aux surfaces est dû principalement, sinon uniquement, à l'excès de la pression atmosphérique.

6. La perte de pression qui vient d'être mise en évidence ne peut être attribuée qu'aux mouvements intestins occasionnés par les aspérités des surfaces solides. En examinant ce qui a lieu autour des corps exposés à l'action d'un courant, on ne saurait douter que, quand la vitesse du fluide n'est pas très-faible, ces aspérités font naître des tourbillonnements; j'ajouterai que, dans le cas de parois rugueuses et de courants rapides, en exposant aux rayons solaires des jets jaillissant d'un tuyau, on peut remarquer que les couches enveloppes, jusqu'à une certaine distance des parois, sont composées de globules; cette constitution se manifestant à l'orifice, on doit croire qu'elle existe dans le tuyau : on conçoit facilement d'ailleurs, connaissant la tendance générale des liquides peu visqueux au groupement sphéroïdal, que ce groupement s'effectue quand les différences de vitesse résultant de l'obstacle opposé par les aspérités au mouvement de translation des

molécules qui les rencontrent, détruisent ou affaiblissent suffisamment la cohésion du liquide.

7. Les diverses observations qui précèdent conduisent à reconnaître que, dans une zone contiguë aux parois, il se produit des phénomènes particuliers de mouvement, de pression intérieure et de constitution qui doivent faire distinguer cette partie des courants; je lui donnerai le nom de *zone troublée*, et la masse qu'elle enveloppe sera désignée par celui de *région principale.*

8. Nous nous occuperons maintenant des mouvements intestins dont cette dernière région peut être le siége. M. Poncelet, à la suite d'importantes remarques sur la formation des tourbillons autour des corps immergés dans les courants, et sur la manière dont la force vive s'éteint dans les fluides [*], a énoncé l'opinion que de semblables mouvements, imprimés aux molécules ou à leurs derniers groupes « sont une des causes de la résistance que les filets fluides éprouvent à glisser les uns sur les autres ou sur la surface des corps solides » : en ce qui concerne les filets intérieurs des courants, l'illustre savant admettait, sans doute, que les tourbillonnements occasionnés par les aspérités des parois se propagent dans toute l'étendue de la masse liquide, ce qui paraît très-probable. Quoi qu'il en soit, lorsqu'on examine l'ensemble des faits connus sous le nom de *communication latérale du mouvement dans les fluides*, on ne saurait douter que la différence des vitesses engendre au moins des déviations, et par conséquent des forces vives transversales : les cours d'eau peuvent enlever au fond de leur lit des parcelles de matière plus dense qu'ils élèvent jusqu'à une certaine hauteur ou qu'ils laissent retomber selon les variations du régime [**]; les oscillations transversales des plantes fluviales à tiges isolées et très-flexibles sont en outre l'indice d'un état oscillatoire du fluide, observation que j'ai faite à l'origine de mes recherches et transformée en expériences

---

[*] *Voir l'Introduction à la Mécanique industrielle*, publiée par M. Poncelet en 1839, p. 528 et suivantes.

[**] *Voir* les résultats d'observation exposés pages 336 et suivantes du *Traité de la mesure des eaux courantes.*

précises [*]. Les différences de vitesse, lorsqu'elles sont, il est vrai, plus grandes que celles qui se produisent dans la région principale des courants à régime uniforme, peuvent modifier la constitution du liquide par suite de l'intensité des mouvements intestins; ainsi, dans mes expériences sur les remous, il est arrivé qu'un courant de fond faisait prendre à l'eau de ceux-ci un aspect huileux, et qu'il se formait à leur intérieur un grand nombre de petits sphéroïdes parfaitement distincts, phénomène analogue à la constitution globulaire que la zone troublée des courants (6) présente dans le cas des mouvements rapides.

Bases d'une théorie expérimentale du régime uniforme des courants liquides.

9. On ne saurait songer à faire pénétrer la théorie dans le détail des mouvements intérieurs, et il serait également superflu d'essayer des équations différentielles fonctions de forces intermoléculaires dont on ignore l'intensité, la direction et la sphère d'activité, ces tâtonnements ne pouvant réussir que dans des cas très-simples où une seule loi est en question ; mais il m'a paru possible d'obtenir, sans entrer dans le champ des hypothèses, des relations propres à la solution des problèmes de la pratique, et peut-être même susceptibles de contribuer, concurremment avec des recherches expérimentales, à la découverte de notions importantes concernant les actions mutuelles des molécules fluides ou de leurs groupes.

10. On a vu précédemment que de nombreuses observations tendent à prouver la périodicité du mouvement des fluides, mais que les instruments de mesure dont nous pouvons disposer indiquent, en général, des moyennes vitesses de transport : j'appliquerai la dénomination de *régime uniforme*, qui a été employée jusqu'à présent dans un sens trop absolu, à l'état du mouvement dans lequel ces vitesses sont sensiblement égales entre elles sur une même trajectoire parallèle aux parois, condition qui peut être réalisée par des dispositifs convenables,

[*] *Traité de la Mesure des eaux Courantes*, p. 332.

et qui se rencontre dans les tuyaux de conduite bien établis, dans les canaux, et même, à certaines époques de l'année, dans les rivières. Lorsque ce régime a lieu, les aires des sections transversales du courant faites par des plans perpendiculaires à la direction constante des trajectoires, sont égales entres elles ou ne diffèrent que de fractions négligeables : en réunissant par des lignes, dans l'une quelconque de ces sections, les points correspondant à une même vitesse expérimentale de transport, on obtient des courbes, dites d'*égale vitesse*, qui, d'après une observation importante de M. Baumgarten vérifiée postérieurement par MM. Darcy et Bazin, sont sensiblement parallèles au profil des parois dans le voisinage de celles-ci : à mesure qu'elles s'éloignent des parois, ce parallélisme s'altère de plus en plus, mais les modifications de courbure ne sont sensibles que pour de notables différences de vitesse.

Cette propriété étant générale, on peut la prendre pour base d'une division à la fois physique et géométrique des courants en éléments de volume distincts. Considérons, dans l'une des sections transversales, le système des molécules dont la vitesse expérimentale est v, puis les deux systèmes consécutivement voisins, dont l'un a une vitesse v' supérieure à celle-ci, tandis que l'autre se transporte avec une vitesse v'' inférieure à v : quelles que soient les lois de leurs mouvements latents, les particules du groupe considéré doivent, dans les variations continues de leur distance à celles des deux autres groupes entre lesquels elles se meuvent, passer périodiquement par des positions moyennes d'équilibre; nommons l, l', l'' les lignes qui, respectivement, dans chacun des trois systèmes précités, joignent entre elles ces positions, et concevons une courbe A passant par le milieu de l'intervalle compris entre l et l'', puis une deuxième courbe A' passant à égales distances de l et de l' : ces deux courbes dont l'intervalle est égal à la distance intermoléculaire moyenne ρ comprendront entre elles les molécules animées de la vitesse de transport v, qui oscillent autour de la ligne l. Concevons maintenant dans la même section deux normales communes à ces courbes et dont l'intervalle soit égal à la distance intermoléculaire moyenne ρ' considérée dans le sens tangentiel; cette distance étant extrêmement petite quoique finie, l'aire du quadilatère limité par les deux normales et les arcs qu'elles interceptent sur les

courbes A et A′ peut être mesurée par le produit $\rho\rho'$. Cela posé, j'appliquerai la dénomination de *filet liquide* employée jusqu'à présent, soit d'une manière vague, soit avec une signification purement abstraite, à l'élément du volume du courant qui a pour section transversale cette aire et pour arêtes des lignes parallèles à la direction du mouvement de transport : en outre, on pourra regarder les courants comme composés de volumes ayant pour section transversale l'aire comprise entre deux courbes telles que A et A′, et pour génératrices limites des lignes parallèles à la même direction ; je désignerai ces derniers éléments de volume par le nom de *nappes à égale vitesse*. Les poids des filets et des nappes ainsi définis ont pour mesure le produit de leurs volumes par la densité gravimétrique des courants, car les proportions de la matière liquide et des intervalles qui n'en contiennent pas, y sont les mêmes que dans la masse totale.

11. Nous avons encore à faire une observation préliminaire concernant ce qu'on nomme ordinairement *pente* des courants : lorsqu'il s'agit des canaux, cette dénomination s'applique au sinus de l'inclinaison sous l'horizon de la surface liquide libre, qui est parallèle au fond du lit, sinus que l'on mesure au moyen d'un nivellement ; mais, dans le cas des tuyaux, on nomme ainsi la différence, par mètre de longueur du courant, des colonnes liquides de piézomètres insérés dans la paroi, et cette différence peut s'écarter plus ou moins de la pente géométrique effective des filets. Pour employer une expression dont la signification soit uniforme, je remplacerai dans tous les cas celle dont il s'agit par la dénomination de *perte de chute*, appliquée à l'unité de longueur.

12. Nous nous occuperons d'abord de la région principale (**7**) des courants. Considérant l'unité de longueur d'une nappe à égale vitesse N, je désignerai par :

v la *vitesse de transport* ou expérimentale commune à toutes ses molécules,

ω l'aire constante de la section transversale de cette nappe,

i la perte de chute,

D le poids de l'unité de volume du courant.

La quantité de travail moteur produite, dans l'unité de temps, par la gravité, est

$$D\omega v i.$$

D'après les résultats d'observation, le système des nappes enveloppe un filet intérieur animé de la vitesse maxima, et les vitesses de ces nappes décroissent de l'une à l'autre d'une manière continue jusqu'à la zone troublée : en conséquence, la nappe quelconque N que nous considérons est située entre deux masses liquides auxquelles elle est liée par la cohésion, et dont l'une tend à retarder son mouvement, tandis que l'autre tend à l'accélérer : je désignerai par X_1 la quantité de travail, dans l'unité de temps, de l'action retardatrice, et par X celle de l'action accélératrice.

Quant aux mouvements intestins d'oscillation, de rotation ou de tourbillonnement dont chaque nappe peut être le siége, nous devons croire que les liaisons intérmoléculaires leur opposent des résistances, car tous les mouvements analogues que leur amplitude rend observables s'affaiblissent progressivement et s'éteignent lorsqu'ils ne sont pas entretenus par une force appliquée, et l'on peut même augurer que la viscosité joue ici un rôle important, attendu que cet affaiblissement est d'autant plus rapide que les liquides sont plus visqueux. Comprenant dans un seul terme les quantités de travail dépensées par la gravité pour l'entretien de ces mouvements intestins qui ont une relation nécessaire avec la différence des vitesses de translation des nappes, je désignerai par ζ la perte de chute correspondante, de sorte que ce terme sera exprimé par le produit

$$D\omega v\zeta.$$

Les courants à régime uniforme étant exempts de causes d'irrégularité, telles que des obstacles intérieurs, des coudes, des variations de dimensions transversales, etc., les périodes successives du mouvement de translation de chaque élément liquide doivent être égales entre elles sous tous les rapports : or, dans un semblable régime, les effets de l'inertie se compensent. D'un autre côté, le travail de compression du liquide est nul ou parfaitement négligeable, et, enfin, aucun fait

connu ne nous autoriserait à supposer ici un travail thermo-dynamique.

En conséquence, le travail moteur de la gravité se répartit entre le mouvement sensible ou de transport, et les mouvements intestins ou latents : c'est le principe que nous proposons de substituer à l'hypothèse, infirmée par les observations précédemment rapportées, de l'équilibre permanent des forces.

15. Cela posé, l'équation du régime uniforme d'une nappe à égale vitesse quelconque de la région principale des courants est

$$D\omega v i = X_1 - X + D\omega v \zeta. \tag{1}$$

Soient maintenant :

v_2 la vitesse de transport de la nappe N_2 qui est immédiatement voisine de la nappe N du côté des parois,

ω_2 l'aire de sa section transversale,

ζ_2 la perte de chute correspondante aux mouvements intestins de cette seconde nappe,

X_2 le travail de la résistance que la masse liquide située entre elle et les parois oppose à son mouvement relatif.

L'action retardatrice appliquée à la surface externe A de la nappe précédente N peut être regardée comme une réaction de la nappe N_2, opposée à l'action accélératrice exercée ou transmise par la première à la surface interne de cette seconde nappe, surface qui se confond avec A ; on a donc, pour la nappe N_2, l'équation

$$D\omega_2 v_2 i = X_2 - X_1 + D\omega_2 v_2 \zeta_2.$$

Chacune des nappes suivantes donne lieu à une équation analogue, et si l'on spécifie par l'indice n les quantités qui se rapportent à celle à laquelle on s'arrête, la dernière équation est

$$D\omega_n v_n i = X_n - X_{n-1} + D\omega_n v_n \zeta_n.$$

L'addition de ces équations successives élimine les indéterminées X_{n-1}, X_{n-2}, ..., X_1 et a pour résultat une équation générale du régime uniforme d'une portion de la région principale du courant, comprise entre deux nappes à égale vitesse : or la somme des produits ωv, $\omega_2 v_2$, ..., $\omega_n v_n$ est le volume liquide qui passe dans l'unité de temps par les sections transversales de cette portion du courant, c'est-à-dire son *débit*, que je désignerai par q : d'un autre côté, la somme des produits tels que $D\omega v\zeta$ est égale au travail moteur qui est consommé pour l'entretien des mouvements intestins, ou, si l'on veut adopter cette expression, des *forces vives latentes* [*] de la même partie considérée du courant : en désignant par z la perte de chute correspondante, on a donc

$$(2) \qquad Dqi = X_n - X + Dqz.$$

En appliquant les considérations précédentes au cylindre liquide qui, limité par l'une quelconque des nappes à égale vitesse, comprend le filet intérieur animé de la vitesse maxima, et désignant par :

q_n le débit de ce cylindre,
z_n la perte de chute due à ses forces vives latentes,

on obtient l'équation

$$(3) \qquad Dq_n i = X_n + Dq_n z_n.$$

14. Je m'occuperai maintenant de la zone troublée contiguë aux parois. Les observations concernant le parallélisme de ces parois et des courbes d'égale vitesse (**10**) ayant été prolongées, dans divers cas, jusqu'à une faible distance des premières, et le parallélisme s'étant trouvé, sans exception, croissant à mesure que cette distance diminuait, il est

[*] Les mouvements intérieurs dont il s'agit ici sont effectivement latents, attendu que les masses liquides, lorsque leur régime de transport est uniforme, présentent une apparence de calme. Quant aux mouvements très-visibles, ou même *tumultueux* dont on a un peu abusé pour justifier des désaccords entre l'expérience et la théorie sans indiquer des modifications à introduire dans celle-ci, ils ne se produisent que dans des circonstances particulières et anormales.

permis d'en inférer que, le long de parois uniformément constituées, les vitesses de transport sont, ou égales entre elles, ou très-peu différentes, que la zone dont il s'agit a une épaisseur uniforme, et qu'elle est limitée, du côté intérieur, par une nappe à égale vitesse. Cette nappe, qui appartient à la région principale du courant, exerce nécessairement sur le fluide de la zone, ou lui transmet, une action accélératrice dont je représenterai le travail dans l'unité de temps par X_0. D'un autre côté, quelles que soient les résistances opposées par les parois au mouvement de transport du liquide, résistances parmi lesquelles la réaction des aspérités joue certainement le principal rôle, on peut, d'après l'observation précédente, les regarder comme constantes sur l'unité de surface des parois homogènes, propriété qui avait été admise sans examen jusqu'à présent. Enfin, pour tenir compte de l'augmentation de surface due aux aspérités, je multiplierai le périmètre mouillé S résultant de la mesure des dimensions transversales de la masse liquide, par un facteur c dépendant de l'état des parois, et auquel je donnerai le nom de *coefficient de rugosité*.

Cela posé, en désignant par :

β la somme des résistances que l'unité de surface des parois oppose au mouvement de transport du liquide,
w_0 la vitesse moyenne de la zone troublée,

on peut représenter le travail, dans l'unité de temps, de la résistance de l'unité de longueur des parois, par le produit $cS\beta w_0$.

La quantité de travail moteur de la gravité dans le même temps est $D\Omega_0 w_0 i$, si l'on désigne par Ω_0 l'aire de la section transversale de la zone troublée.

Au moyen de poussières flottant très-près de parois présentant des aspérités visibles, on peut s'assurer que la portion de la zone qui n'est pas engagée entre ces aspérités a un régime sensiblement uniforme ; quant aux particules liquides qui les rencontrent, il peut sembler nécessaire de faire entrer dans les équations un terme représentant l'effet de leur inertie. En désignant par :

u' et u'' les valeurs de leur vitesse absolue au commencement et à la fin du temps considéré,

p le poids du liquide qui passe dans ce temps entre les aspérités,

on a pour expression du travail d'inertie

$$\frac{p}{2g}(u''^2 - u'^2),$$

quantité dont la valeur absolue se retranche du travail moteur ou s'y ajoute, selon que, dans le temps considéré, le mouvement vrai a été accéléré ou retardé. En définitive, l'équation relative à la zone troublée serait

$$(4) \qquad D\Omega_0 w_0 i \pm \frac{p}{2g}(u''^2 - u'^2) = cS\beta w_0 + D\Omega_0 w_0 z_0 - X_0.$$

En faisant $X_n = X_0$ dans l'équation (3), puis éliminant X_0 entre cette équation, qui, après la substitution, s'applique à la région principale tout entière, et l'équation (4), on a

$$D(q_n + \Omega_0 w_0)i \pm \frac{p}{2g}(u''^2 - u'^2) = cS\beta w_0 + D(q_n z_n + \Omega_0 w_0 z_0).$$

On ne pourrait obtenir les valeurs du second terme du premier membre, mais il y a lieu de remarquer : 1° que la masse qu'il concerne n'est qu'une portion de la zone troublée, et, par conséquent, une très-petite fraction de la masse du courant ; 2° que les vitesses u' et u'' doivent être très-faibles, les molécules liquides rencontrant incessamment des obstacles; 3° que ces molécules, en se déviant, passent dans les intervalles compris entre les aspérités, où elles doivent recevoir une certaine accélération succédant à un ralentissement produit par leur choc contre ces obstacles, en sorte que les effets de leur inertie, non-seulement sont très-faibles, mais en outre se compensent, sinon entièrement, au moins en partie. En conséquence, le terme dont il s'agit est parfaitement négligeable devant le travail total de la pesanteur représenté par le terme précédent. Cela posé, en désignant par :

Q le débit total du courant;

$T = D(q_n z_n + \Omega_0 w_0 z_0)$ la portion du travail moteur de la gravité qui est consommée pour l'entretien des forces vives latentes dans la totalité de la masse, sur l'unité de longueur, du courant,

l'équation précédente devient

$$(5) \qquad \mathrm{DQ}i = c\mathrm{S}\beta w_0 + \mathrm{T}.$$

J'exposerai ultérieurement les considérations théoriques et les recherches expérimentales au moyen desquelles on peut obtenir des expressions du produit βw_0 et du travail T en fonction des données ordinaires des calculs des ingénieurs. D'après les déterminations que j'ai déjà pu effectuer, la perte de chute due aux mouvements intestins varierait, dans les tuyaux en fonte sans dépôts, entre $\frac{1}{7}$ et $\frac{1}{12}$ de la perte totale i.

15. On comprend l'imperfection des formules qui ont été proposées jusqu'à présent, en se rendant compte de la véritable signification des forces auxquelles a été attribué le rôle d'équilibrer les poids des masses fluides en agissant sur les molécules de leurs contours : considérant d'abord celle que l'on nomme *frottement sur les parois*, et dont les valeurs numériques ont été déterminées au moyen de nombreuses expériences, nous désignerons par :

F ce frottement sur l'unité de surface,
A l'aire de la section transversale du courant,
U sa vitesse moyenne.

On a posé la relation $\mathrm{SF} = \mathrm{DA}i$; or, en multipliant les deux membres de cette égalité par la vitesse moyenne, on a $\mathrm{SFU} = \mathrm{DQ}i$, et en substituant au produit $\mathrm{DQ}i$ sa valeur tirée de l'équation (5)

$$\mathrm{SFU} = c\mathrm{S}\beta w_0 + \mathrm{T},$$

ce qui montre que SF est un *effort moyen fictif* dont la quantité de travail effectuée le long d'un chemin égal à la vitesse moyenne du courant serait numériquement égale à la somme de celles qui sont consommées dans l'unité de temps par la résistance effective des parois et par les mouvements intestins de la masse liquide. Quant aux frottements des couches fluides les unes sur les autres, que l'on a fait intervenir de la même manière, soient :

σ et Ω le périmètre et l'aire de la section transversale d'un cylindre liquide intérieur limité par une nappe à égale vitesse,

u sa vitesse moyenne,

φ la résistance, par unité de surface, au glissement de ce cylindre sur la nappe qui l'enveloppe.

L'équation (3), dont le principe est incontestable, donne, en désignant par τ le travail latent de cette partie du courant,

$$D\Omega ui = X_n + \tau,$$

et, par conséquent, en y introduisant la notion de l'équilibre entre le frottement et la gravité,

$$\sigma\varphi . u = X_n + \tau.$$

Ces résistances intérieures ont donc une signification analogue à celle des précédentes et sont également fictives. En faisant intervenir les unes et les autres au lieu d'actions retardatrices complexes dues à deux ordres de phénomènes dont les lois ne sont pas les mêmes, on ne pouvait réussir à les représenter par des formules simples et générales.

Mémoire sur l'équation aux différences partielles du quatrième ordre $\Delta\Delta u = 0$ et sur l'équilibre d'élasticité d'un corps solide;

PAR M. ÉMILE MATHIEU.

On connaît maintenant plusieurs théorèmes relatifs au potentiel v d'une masse quelconque, qui satisfait en dehors de cette masse à l'équation

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2} = 0,$$

x, y, z étant les trois coordonnées rectangulaires du point auquel se rapporte le potentiel, équation que nous représenterons, pour abréger, par

$$(a) \qquad \Delta v = 0.$$

Je me propose de montrer dans ce Mémoire qu'il existe pareillement des théorèmes généraux sur la fonction u, qui, dans un certain espace, satisfait à l'équation aux différences partielles du quatrième ordre

$$(b) \qquad \Delta\Delta u = 0,$$

ou

$$\frac{d^4 u}{dx^4} + \frac{d^4 u}{dy^4} + \frac{d^4 u}{dz^4} + 2\frac{d^4 u}{dy^2 dz^2} + 2\frac{d^4 u}{dz^2 dx^2} + 2\frac{d^4 u}{dx^2 dy^2} = 0$$

Cette équation se rencontre en physique mathématique; en effet, quand un corps solide, homogène, et dont l'élasticité est la même dans tous les sens, est soumis à sa surface à des pressions qui le maintiennent en équilibre d'élasticité, les projections du déplacement

d'un point quelconque de l'intérieur du corps sur les axes de coordonnées satisfont à l'équation $\Delta\Delta u = 0$; et il en est encore de même des composantes des forces élastiques qui s'exercent sur des éléments plans parallèles aux plans de coordonnées.

Si l'on suppose que u ne dépende pas de z, cette équation se réduit à

$$\frac{d^4 u}{dx^4} + 2\frac{d^4 u}{dx^2 dy^2} + \frac{d^4 u}{dy^4} = 0.$$

Or imaginons une plaque plane, homogène, d'épaisseur uniforme et de même élasticité dans tous les sens, et déplaçons-en légèrement les bords d'une manière permanente; le déplacement normal d'un point quelconque de la surface médiane de la plaque sera encore donné par cette équation.

On comprend donc l'intérêt qu'il y a à s'occuper de la fonction qui satisfait à l'équation (b), et nous ferons voir d'ailleurs que cette étude permettra d'intégrer cette équation.

Du potentiel et de l'équilibre de température.

1. La fonction v qui satisfait à l'équation (a) satisfaisant aussi à l'équation (b), on sent bien que l'on ne doit pas aborder l'étude plus compliquée de la fonction u, sans avoir bien présentes à l'esprit les propriétés de la première; nous allons donc résumer certaines propriétés du potentiel, qui nous seront utiles dans la suite de ce Mémoire.

Non-seulement le potentiel v d'une masse quelconque satisfait en dehors de cette masse à l'équation de Laplace

$$(a) \qquad \Delta v = 0;$$

mais dans l'état d'équilibre de température d'un corps isotrope, cette température satisfait à cette équation en un point quelconque du corps. A ce point de vue même, la fonction u de la théorie de l'élasticité semble avoir plus d'analogie avec la température d'équilibre qu'avec le potentiel, puisqu'elle ne se rapporte aussi qu'à l'intérieur d'une surface fermée σ qui limite un corps. Cependant nous allons

voir que cette différence entre le potentiel et la température d'équilibre n'a rien d'essentiel.

2. Soit $d\varpi$ l'élément de volume d'un corps et $d\sigma$ l'élément de la surface σ qui le termine; si v et w, ainsi que leurs dérivées, sont des fonctions continues de x, y, z, on a l'équation donnée par Green

$$(c)\qquad \int v\,\Delta w\, d\varpi - \int w\,\Delta v\, d\varpi = \int v\frac{dw}{dn}\,d\sigma - \int w\frac{dv}{dn}\,d\sigma \text{ [*]},$$

dn étant l'élément de normale à la surface comptée vers l'extérieur du corps, et les intégrales se rapportant à son volume entier ou à toute sa surface.

Si l'on prend pour w la fonction discontinue $\frac{1}{r}$, r étant la distance d'un point variable (a, b, c) de l'intérieur du corps à un point (x, y, z) fixe qui y est aussi situé, on pourra appliquer cette équation au volume renfermé entre σ et une sphère infiniment petite dont le centre est au point (x, y, z), et on en conclut l'équation

$$(d)\qquad \int \frac{1}{r}\,\Delta v\, d\varpi = -\int v\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,d\sigma + \int \frac{1}{r}\frac{dv}{dn}\,d\sigma - 4\pi v.$$

De cette équation Green conclut que, si une fonction v satisfait à l'équation (a), en variant d'une manière continue en dedans et en dehors de la surface σ, qu'elle prenne à cette surface la même valeur a l'intérieur et à l'extérieur, et enfin qu'elle s'annule à l'infini, cette fonction peut être considérée comme le potentiel d'une couche infiniment mince de matière distribuée sur la surface σ.

En effet, l'équation (d) donnera

$$0 = \int v\frac{d\frac{1}{r}}{dn'}\,d\sigma - \int \frac{1}{r}\frac{dv}{dn'}\,d\sigma - 4\pi v,$$

dn' étant l'élément de normale comptée vers l'intérieur du corps.

---

[*] Cette formule est démontrée par Green dans son Mémoire sur l'électricité (*Journal de Crelle*, t. XLIV, p. 360) et dans la *Théorie de la Chaleur* de M. Lamé, § 58.

Considérons ensuite le volume renfermé entre la surface σ et une autre surface σ' qui renferme la première; $\frac{1}{r}$ ne devenant pas infini dans cet intervalle, il faudra appliquer l'équation (c) au lieu de (d), en y faisant $w = \frac{1}{r}$, et nous aurons, si nous supposons que la surface σ' aille à l'infini,

$$o = \int v \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma - \int \frac{1}{r} \frac{dv}{dn} d\sigma,$$

en remarquant que les intégrales relatives à la surface infinie s'annulent. Ajoutons ces deux équations, en observant que l'on a

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dn'} + \frac{d\frac{1}{r}}{dn} = o,$$

et nous obtenons

$$(e) \qquad v = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{r} \left(\frac{dv}{dn} + \frac{dv}{dn'} \right) d\sigma;$$

donc v peut être considéré à l'intérieur de σ comme le potentiel d'une couche distribuée sur cette surface dont la densité est

$$\rho = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{dv}{dn} + \frac{dv}{dn'} \right).$$

On démontre ce théorème de la même manière à l'extérieur de σ.

Cette formule de la densité d'une couche a été reconnue par Poisson et démontrée pour la première fois par Laplace. (*Voir* les *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1811, p. 5 et 31.)

3. Il faut ensuite noter ce théorème :

1° *Il existe toujours à l'intérieur de la surface σ une fonction v finie et continue de x, y, z en même temps que ses dérivées, qui satisfait à l'équation*

$$\Delta v = o,$$

et qui a une valeur donnée à la surface σ, et il n'y en a qu'une seule.

2° *Il existe aussi une fonction, et une seule, qui satisfait en dehors de σ à ces conditions, auxquelles on ajoute que v est nul à l'infini.*

D'après ce que nous venons de voir, si ces deux fonctions existent elles peuvent être assimilées au potentiel d'une même couche, et ce théorème revient à celui-ci :

On peut toujours assigner une couche distribuée sur la surface σ, et une seule, dont le potentiel ait une valeur donnée en chaque point de cette surface, pourvu que cette valeur donnée varie d'une manière continue.

Gauss est, je crois, le seul qui ait donné de cette proposition une démonstration rigoureuse dans son Mémoire sur le potentiel [*]; mais par la considération de l'équilibre de température, ce théorème dans son premier énoncé devient presque évident; car il revient à ces deux autres :

1° *Si un corps homogène est en équilibre de température et que tous les points de sa surface soient entretenus à des températures données et fixes, la température en un point quelconque de ce corps est déterminée;*

2° *Concevons un corps homogène compris entre la surface σ qui est intérieure et la surface S qui le limite extérieurement. On entretient la surface σ à des températures données et fixes et la surface S à zéro. La température dans ce corps sera complétement déterminée, quelque éloignée que soit S et par suite encore si elle va à l'infini.*

4. Imaginons des masses renfermées dans l'intérieur d'une surface fermée σ; le potentiel de ces masses en dehors de σ peut être assimilé à celui d'une couche de matière distribuée sur σ.

En effet, ce potentiel satisfait en dehors de σ à l'équation

$$\Delta v = 0,$$

il y varie d'une manière continue avec ses dérivées, et il s'annule à

[*] *Voir* le cinquième volume des *Œuvres de Gauss*, p. 232-237, ou la traduction dans ce Journal, t. VII, 1re série. Green a aussi donné de ce théorème une démonstration, en s'appuyant sur une considération tirée de la théorie de l'électricité, qui n'est pas préférable à celle de l'équilibre de température. (*Journal de Crelle*, t. XLIV, p. 367.)

l'infini. Or, tant que l'on n'a à considérer que les valeurs de v à l'extérieur de σ, on peut imaginer, d'après le théorème du n° 3, que v satisfait à l'intérieur de σ à la même équation, a la même valeur a cette surface et varie d'une manière continue ainsi que ses dérivées Du n° 2, on conclut donc le théorème cité.

En supposant des masses à l'extérieur de la surface σ, on démontrera de même que le potentiel de ces masses en dedans de σ peut être assimilé à celui d'une couche de matière distribuée sur σ.

5. Si v représente la température d'équilibre d'un corps, v n'est plus défini qu'à l'intérieur de la surface σ qui limite ce corps; mais, comme on peut alors définir arbitrairement la fonction v en dehors de cet intervalle, nous pouvons supposer qu'en dehors de σ elle satisfasse à $\Delta v = 0$, qu'elle soit nulle à l'infini et qu'elle ait la même valeur sur la surface σ à l'extérieur qu'à l'intérieur; nous déterminons ainsi v à l'extérieur de σ, et il est permis encore d'appliquer la formule (e) du n° 2.

Mais nous pouvons nous représenter v physiquement à l'extérieur comme à l'intérieur de σ. Imaginons, en effet, que le corps homogène renfermé sous σ soit prolongé en tous sens jusqu'à l'infini, et concevons que le corps T renfermé sous σ soit séparé du corps extérieur T' par une couche infiniment mince qui est le siége d'une source de chaleur; l'intensité de cette source est fixe, mais varie d'un point à un autre de la surface, et, par conséquent, la température est la même à la limite de l'espace T et à la limite de l'espace indéfini T'; supposons de plus que la température soit maintenue à zéro à l'infini. La température d'un point quelconque de l'espace T ou de l'espace T' sera donnée par la formule (e). Examinons donc ce que représente $\frac{dv}{dn} + \frac{dv}{dn'}$.

Soit m un élément de la surface σ. En cet élément, établissons la continuité de la matière entre T et T', et désignons par q le coefficient de conductibilité; alors les flux de chaleur normaux à cet élément seront les mêmes dans T et T'. Écrivons donc

$$q\frac{dv}{dn'} = \mathrm{U}, \quad -q\frac{dv}{dn} = \mathrm{U};$$

ces flux proviennent de la source de chaleur entretenue à la surface σ, diminuée de la portion infiniment petite qui recouvre l'élément m. Or, de plus, la partie de la source de chaleur située en m envoie deux flux normaux de même intensité am, mais de sens contraire : l'un à l'intérieur de σ, l'autre à l'extérieur. On a donc

$$q\frac{dv}{dn'} = \mathrm{U} - a, \quad -q\frac{dv}{dn} = \mathrm{U} + a,$$

et il en résulte

$$\frac{dv}{dn'} + \frac{dv}{dn} = -\frac{2a}{q};$$

d'où l'on voit la signification de la quantité du premier membre.

6. Beaucoup de théorèmes sur le potentiel deviennent intuitifs en leur substituant ceux qui y correspondent dans l'équilibre de température.

Ainsi, par exemple, concevons des masses situées à l'extérieur d'une surface σ; si leur potentiel est constant sur la surface, il aura la même valeur constante en un point intérieur quelconque.

Ce théorème revient à celui-ci :

Si la surface d'un corps est entretenue à une même température et qu'il y ait équilibre de chaleur, la température est la même en un point intérieur quelconque.

Lorsque des masses sont situées dans l'intérieur d'une surface fermée σ ou répandues sur cette surface, si le potentiel a une valeur constante A en chaque point de la surface, il a en tout point extérieur une valeur comprise entre A et zéro. Elle est donc constamment nulle, si A est nul.

Cette proposition est renfermée dans celle-ci :

Concevons un corps homogène entre la surface σ qui est intérieure et la surface S qui le limite extérieurement; on entretient la surface σ à la température A fixe, et la même en chaque point, et la surface S à la température zéro. Alors tous les points intérieurs seront à une

température comprise entre A et zéro. Ce qui subsiste encore quand la surface S s'éloigne à l'infini.

Revenons à l'équation $\Delta\Delta u = 0$

Théorème sur l'expression $\Delta\Delta u$.

7. Désignons par $d\varpi$ l'élément de volume d'un corps et par $d\sigma$ l'élément de sa surface; d'après l'équation (c) du n° **2**, nous avons

$$(1)\qquad \int v\Delta u\,d\varpi - \int u\Delta v\,d\varpi = \int v\frac{du}{dn}d\sigma - \int u\frac{dv}{dn}d\sigma,$$

u et v étant deux fonctions qui varient d'une manière continue dans l'intérieur de σ, ainsi que leurs dérivées, et dn l'élément de la normale comptée vers l'extérieur.

Dans cette équation, changeons v en $\Delta u'$, nous aurons

$$\int \Delta u\,\Delta u'\,d\varpi = \int u\Delta\,\Delta u'\,d\varpi + \int \Delta u'\frac{du}{dn}d\sigma - \int u\frac{d\Delta u'}{dn}d\sigma.$$

Le premier membre de cette formule reste invariable par la permutation des fonctions u et u'; il en doit donc être de même du second, et on a

$$\int u\Delta\,\Delta u'\,d\varpi + \int \Delta u'\frac{du}{dn}d\sigma - \int u\frac{d\Delta u'}{dn}d\sigma$$
$$= \int u'\Delta\,\Delta u\,d\varpi + \int \Delta u\frac{du'}{dn}d\sigma - \int u'\frac{d\Delta u}{dn}d\sigma$$

ou

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int u\Delta\,\Delta u'\,d\varpi - \int u'\Delta\,\Delta u\,d\varpi \\ &= \int\left(u\frac{d\Delta u'}{dn} - u'\frac{d\Delta u}{dn}\right)d\sigma + \int\left(\Delta u\frac{du'}{dn} - \Delta u'\frac{du}{dn}\right)d\sigma, \end{aligned}\right.$$

formule qui joue le même rôle dans la théorie de l'équation

$$\Delta\Delta u = 0$$

que la formule (1) dans la théorie de l'équation

$$\Delta u = 0.$$

Dans la formule (1), u et v étant assujettis à varier d'une manière continue, ainsi que leurs dérivées premières; dans la formule (2), il faut supposer que u, u' et leurs dérivées premières, deuxièmes et troisièmes jouissent de la continuité.

Au lieu de considérer un volume, concevons une surface plane dont l'élément est $d\omega$ et terminée à un contour dont l'élément est ds; si u et v sont des fonctions de deux coordonnées rectangles x, y d'un point de ce plan, nous aurons la formule entièrement analogue à la formule (1)

$$(3) \qquad \int v\Delta u\, d\omega - \int u\Delta v\, d\omega = \int v\frac{du}{dn}ds - \int u\frac{dv}{dn}ds.$$

Puis, par un calcul tout semblable à celui qui nous a conduit à la formule (2), on arrivera à celle-ci :

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\int u\Delta\Delta u'\, d\omega - \int u'\Delta\Delta u\, d\omega \\ &= \int\left(u\frac{d\Delta u'}{dn} - u'\frac{d\Delta u}{dn}\right)ds + \int\left(\Delta u\frac{du'}{dn} - \Delta u'\frac{du}{dn}\right)ds, \end{aligned} \right.$$

formule dont nous nous sommes déjà servi dans la théorie des plaques vibrantes. Les fonctions sont assujetties dans les formules (3) et (4) aux mêmes conditions de continuité que dans les formules (1) et (2).

Applications de la formule (2).

8. Désignons par r la distance entre le point (x, y, z) extérieur à la surface σ qui limite le corps et le point variable (a, b, c) situé dans ce corps ou à sa surface, de sorte que l'on peut prendre $d\varpi = da\,db\,dc$, et que l'on a

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2.$$

Faisons dans l'équation (2) $u' = r$; nous avons

$$\frac{d^2 r}{da^2} = \frac{1}{r} - \frac{(x-a)^2}{r^3},$$

et, par suite,

$$\Delta r = \frac{2}{r} \quad \text{et} \quad \Delta\Delta r = 0;$$

l'équation (2) devient en conséquence

$$(5) \quad \int r\Delta\Delta u d\varpi = \int\left(r\frac{d\Delta u}{dn} - \Delta u\frac{dr}{dn}\right)d\sigma + 2\int\left(\frac{1}{r}\frac{du}{dn} - u\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right)d\sigma,$$

formule dans laquelle le point (x, y, z) est extérieur au corps; u dans cette équation est supposé une fonction de a, b, c.

Lorsque le point (x, y, z) est intérieur à la surface σ, l'équation (2) n'est plus immédiatement applicable, parce que $\frac{1}{r}$ devient infini dans l'intérieur du corps quand a, b, c se confondent avec x, y, z. Mais imaginons une sphère s infiniment petite, qui ait son centre au point (x, y, z), et nous pourrons appliquer la dernière équation au volume compris entre s et σ. On voit facilement qu'il faut alors ajouter à la seconde intégrale du second membre cette autre

$$-2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{R}\frac{du}{dR} - u\frac{d\frac{1}{R}}{dR}\right)R^2\sin\theta\, d\psi\, d\theta,$$

R étant le rayon de la sphère, et en faisant tendre R vers zéro elle se réduit à l'expression $-8\pi u$ dans laquelle a, b, c sont remplacés par x, y, z.

Donc si le point (x, y, z) est situé à l'intérieur de la surface σ, on a

$$(6) \quad \left\{\begin{aligned} &\int r\Delta\Delta u d\varpi \\ &= \int\left(r\frac{d\Delta u}{dn} - \Delta u\frac{dr}{dn}\right)d\sigma + 2\int\left(\frac{1}{r}\frac{du}{dn} - u\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right)d\sigma - 8\pi u. \end{aligned}\right.$$

Au lieu de faire $u' = r$, prenons généralement pour u' une fonction de a, b, c, qui satisfait par rapport à ces variables à $\Delta\Delta u' = 0$, qui varie d'une manière continue dans l'intérieur de σ, ainsi que ses déri-

vées des trois premiers ordres, excepté au point (x, y, z) aux environs duquel $\Delta u'$ se réduit sensiblement à $\frac{2}{r}$. On déduira de même de l'équation (2), pour un point intérieur (x, y, z),

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int u' \Delta\Delta u \, d\varpi \\ &= \int \left(u' \frac{d\Delta u}{dn} - u \frac{d\Delta u'}{dn} \right) d\sigma + \int \left(\Delta u' \frac{du}{dn} - \Delta u \frac{du'}{dn} \right) d\sigma - 8\pi u, \end{aligned} \right.$$

équation que nous aurons occasion d'employer.

Du second potentiel.

9. Considérons le potentiel donné par l'intégrale triple

$$v = \int\int\int \frac{\varphi(a, b, c)}{r} \, da\, db\, dc$$

étendue à un certain volume Π, et dans laquelle r désigne la distance du point (x, y, z) au point variable (a, b, c). On sait que l'on a

$$\Delta v = 0 \quad \text{ou} \quad \Delta v = -4\pi\varphi(x, y, z),$$

selon que le point (x, y, z) est situé en dehors ou en dedans du volume Π.

Passons de cette fonction à la suivante :

$$w = \int\int\int r\varphi(a, b, c) \, da\, db\, dc;$$

nous aurons

$$(a)\qquad \frac{d^2 w}{dx^2} = \int\int\int \varphi(a, b, c) \left[\frac{1}{r} - \frac{(x-a)^2}{r^3} \right] da\, db\, dc,$$

et, par suite,

$$(b)\qquad \Delta w = 2v,$$

ainsi que l'a remarqué M. Lamé dans sa *Théorie de l'Élasticité*, 6e Leçon.

Il faut observer que l'équation (a), et par suite l'équation (b), a lieu quand le point (x, y, z) est intérieur aussi bien que lorsqu'il est extérieur au volume Π, parce que l'infini qui se trouve dans l'intégrale de l'équation (a) est d'un ordre moindre que $\frac{1}{r^3}$, et si l'on applique cette intégrale au volume d'une sphère infiniment petite entourant ce point, on obtient un résultat nul.

L'équation (b) étant prouvée, on a, en prenant le Δ des deux membres,

$$\Delta\Delta w = 0, \text{ si le point } (x, y, z) \text{ est extérieur au volume } \Pi,$$
$$\Delta\Delta w = -8\pi\varphi(x, y, z), \text{ si ce point lui est intérieur.}$$

Nous appellerons w le *second potentiel* de la masse renfermée dans Π, et quand nous voudrons distinguer v de w, nous lui donnerons le nom de *premier potentiel*. Les dérivées de w par rapport à x, y, z sont les composantes suivant les trois axes de coordonnées d'une attraction d'après laquelle deux molécules s'attireraient suivant la droite qui les joint, mais indépendamment de leur distance.

10. Imaginons une couche de matière infiniment mince répandue sur la surface σ; en désignant par ρ la densité de cette couche, on aura pour son second potentiel

$$w = \int \rho r d\sigma;$$

w en dedans et en dehors de la surface σ satisfera à l'équation $\Delta\Delta w = 0$, et, de plus, dans ces deux espaces w variera d'une manière continue, ainsi que ses dérivées des trois premiers ordres. Si l'on appelle v et v' le premier potentiel de cette couche à l'extérieur et à l'intérieur, on aura

$$\rho = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{dv}{dn} + \frac{dv'}{dn'}\right) = -\frac{1}{8\pi}\left(\frac{d\Delta w}{dn} + \frac{d\Delta w'}{dn'}\right).$$

Remarquons aussi que, lorsque le point (x, y, z) traverse la couche, la fonction w et ses dérivées des deux premiers ordres varient d'une

manière continue; mais les dérivées du troisième ordre sont en général discontinues.

Ici il nous serait facile de démontrer ce théorème : *Il existe toujours une couche de matière, et une seule, distribuée sur la surface σ et dont le second potentiel a une valeur donnée en chaque point de cette surface.*

Mais pour le prouver, il suffit de suivre littéralement la démonstration citée au n° 5 du même théorème donné par Gauss pour le premier potentiel, qui compose la partie la plus remarquable de son Mémoire. Faisons toutefois observer que la considération du minimum employée par Gauss doit être remplacée par celle d'un maximum.

Sur une solution de l'équation $\Delta\Delta u = 0$.

11. Je dis qu'on peut toujours trouver une fonction u qui satisfait à l'équation

$$(1) \qquad \Delta\Delta u = 0$$

à l'intérieur de la surface σ, qui y varie d'une manière continue avec ses dérivées des trois premiers ordres, et dont la valeur et celle de son Δ sont données à la surface.

A cet effet posons

$$(2) \qquad u = w + v,$$

$$v = \int \frac{\rho'}{r} d\sigma, \quad w = \int \rho r d\sigma,$$

ρ et ρ' étant des fonctions des coordonnées de chaque point (a, b, c) de la surface σ et r^2 égal à

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2);$$

v et w sont par conséquent les premier et second potentiels de deux couches de matière qui recouvrent cette surface.

D'abord, la fonction u satisfait à l'équation (1) et aux conditions de

continuité. Il faut ensuite que, sur la surface, u soit égal à la fonction ψ, et Δu ou Δw soit égal à φ.

D'après cela, $t = \Delta w$ satisfera, d'après (1), à l'équation

$$\Delta t = 0,$$

et sera une fonction donnée à la surface; elle est donc complétement déterminée (n° **5**), et, de plus, elle peut se mettre sous la forme

$$t = 2\int \frac{\rho}{r}\,d\sigma;$$

et si l'on prend

$$w = \int \rho r\,d\sigma,$$

Δw sera égal à φ à la surface, et on aura bien d'après le n° **9**

$$\Delta w = t.$$

Connaissant w, on aura la valeur de v à la surface en retranchant celle de w de celle qui a été donnée pour u; par suite, v sera complétement déterminé.

Ainsi, le théorème est démontré, et, de plus, on voit comment on peut mettre la solution sous la forme (2).

Des conditions aux limites qui déterminent parfaitement la solution de l'équation $\Delta\Delta u = 0$.

12. Considérons une fonction u de x, y, z satisfaisant à l'équation

$$\Delta\Delta u = 0$$

dans l'intérieur de la surface σ, et supposons que u et ses dérivées des trois premiers ordres y varient d'une manière continue; u' étant supposé une fonction semblable à u, on a, d'après la deuxième équation du n° **7**,

$$\int u\Delta\Delta u'\,d\varpi = \int \Delta u\,\Delta u'\,d\varpi - \int \Delta u'\frac{du}{dn}\,d\sigma + \int u\frac{d\Delta u'}{dn}\,d\sigma$$

Faisons $u' = u$, et nous aurons

$$0 = \int (\Delta u)^2 d\varpi - \int \Delta u \frac{du}{dn} d\sigma + \int u \frac{d\Delta u}{dn} d\sigma;$$

mais, comme u n'est défini qu'à l'intérieur de σ, il convient de mener la normale vers l'intérieur et de la compter dans cette direction; remplaçant dn par $-dn'$, on a

$$(e) \qquad 0 = \int (\Delta u)^2 d\varpi + \int \Delta u \frac{du}{dn'} d\sigma - \int u \frac{d\Delta u}{dn'} d\sigma.$$

Alors supposons que, sur la surface σ, u satisfasse à l'un des deux systèmes de condition :

1° $\qquad u = 0, \quad \Delta u = 0;$

2° $\qquad u = 0, \quad \dfrac{du}{dn'} = 0,$

l'équation précédente se réduira à

$$\int (\Delta u)^2 d\varpi = 0;$$

on en conclut que Δu est nul en tous les points de l'intérieur de σ, et, par suite, u est lui-même nul dans toute cette étendue. Car on sait que, lorsqu'une fonction u satisfait à $\Delta u = 0$ dans l'intérieur de σ et s'annule à cette surface, elle est nulle en tous les points intérieurs (n° 6).

De là on conclut immédiatement :

Il ne peut exister qu'une fonction qui satisfasse à l'équation

$$\Delta\Delta u = 0$$

dans l'intérieur de la surface σ, qui y varie d'une manière continue avec ses dérivées des trois premiers ordres, et pour laquelle

$$u, \quad \Delta u \quad \text{ou} \quad u, \quad \frac{du}{dn'}$$

aient une valeur donnée à la surface.

Soient en effet u et u' des fonctions qui satisfont toutes deux à l'une des hypothèses, et posons

$$u - u' = \theta.$$

θ satisfera en tous les points du volume ϖ à l'équation

$$\Delta\Delta\theta = 0,$$

et on aura à la surface

$$\theta = 0,\quad \Delta\theta = 0 \qquad \text{ou} \qquad \theta = 0,\quad \frac{d\theta}{dn'} = 0,$$

et, par conséquent, θ sera nul en tous les points intérieurs; ce qu'il fallait démontrer.

Or, nous avons vu que l'on peut toujours trouver une fonction de la forme

$$u = \int \rho r\, d\sigma + \int \frac{\rho'}{r}\, d\sigma,$$

dont la valeur ainsi que celle de son Δ sont données à la surface σ.

On en conclut les deux théorèmes suivants :

1° *Il existe une fonction, et une seule, qui satisfait à l'équation*

$$\Delta\Delta u = 0$$

dans l'intérieur de la surface σ, qui y varie d'une manière continue avec ses dérivées des trois premiers ordres, et dont la valeur et celle de son Δ sont données à la surface.

2° *Toute fonction u qui satisfait, à l'intérieur de σ, à l'équation $\Delta\Delta u = 0$, et qui est assujettie aux conditions précédentes de continuité, est la somme du premier potentiel d'une couche qui recouvre la surface σ, et du second potentiel d'une autre couche recouvrant la même surface.*

Ce second théorème donne donc l'intégrale générale de l'équation aux différences partielles, intégrale dans laquelle les densités des couches sont deux fonctions continues quelconques des coordonnées de la surface σ.

15. Il y a un théorème semblable au premier dans lequel on se donne à la surface u et $\frac{du}{dn'}$, au lieu de u et Δu, et que nous allons démontrer.

Pour éviter toute confusion, continuant à poser

$$\Delta u = \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2};$$

quelle que soit la fonction u, posons de plus

$$\Delta' u = \frac{d^2 u}{dx'^2} + \frac{d^2 u}{dy'^2} + \frac{d^2 u}{dz'^2},$$

et l'on voit bien, par conséquent, ce que représentera l'expression $\Delta'\Delta' u$; puis établissons le lemme suivant.

Lemme. — On peut toujours trouver une fonction U de x, y, z et de x', y', z' : 1° qui reste invariable quand on permute x, y, z respectivement avec x', y', z' ; 2° qui, considérée comme fonction de x', y', z', varie d'une manière continue dans l'intérieur de la surface σ, ainsi que ses dérivées des trois premiers ordres, excepté au point (x, y, z), aux environs duquel son Δ' se réduit sensiblement à $\frac{2}{r}$, r étant la distance entre les points (x, y, z) et (x', y', z'); 3° qui satisfait aux deux équations

$$\Delta\Delta \mathrm{U} = 0, \quad \Delta'\Delta' \mathrm{U} = 0,$$

quand (x, y, z) et (x', y', z') sont deux points intérieurs à la surface σ; 4° qui se réduit à zéro quand le point (x', y', z') vient sur la surface.

Prenons un point quelconque P (x, y, z) dans l'espace limité par la surface σ; selon ce qui a été dit au n° **10**, on peut toujours couvrir cette surface d'une couche de matière, de telle sorte que le second potentiel de cette couche, par rapport à un point quelconque M de la surface, soit égal à R (P, M), en désignant par R (P, M) la distance entre les points P et M.

Comme cette couche dépend de la position du point P, représentons par ρ (P) sa densité; le second potentiel de cette couche, par rapport à un second point intérieur P', étant désigné par Γ (P, P'), nous

aurons

$$(1) \qquad \Gamma(P, P') = \int \rho(P)\, R(d\sigma, P')\, d\sigma,$$

d'après la définition même du second potentiel; et, x', y', z' étant les coordonnées du point P', on aura, d'après un théorème connu (n° 9),

$$(2) \qquad \Delta'\Delta'\Gamma(P, P') = 0,$$

et, d'après la condition admise à la surface σ, on a

$$(3) \qquad \int \rho(P)\, R(d\sigma, M)\, d\sigma = R(P, M),$$

M étant un point quelconque de cette surface.

Considérons ensuite une seconde couche qui soit, par rapport à P', ce qu'est la première par rapport au point P. Suivant les notations précédentes, $\rho(P')$ sera la densité de cette couche dont le second potentiel, par rapport au point G, sera

$$\int \rho(P')\, R(d\sigma', G)\, d\sigma',$$

$d\sigma'$ étant un élément quelconque de la surface σ; et la condition a la surface donne

$$\int \rho(P')\, R(d\sigma', d\sigma)\, d\sigma' = R(P', d\sigma).$$

Portons cette valeur de $R(P', d\sigma)$, dans l'équation (1), et nous aurons

$$\Gamma(P, P') = \int\int \rho(P)\, \rho(P')\, R(d\sigma, d\sigma')\, d\sigma\, d\sigma',$$

d'où l'on conclut

$$\Gamma(P, P') = \Gamma(P', P);$$

ainsi, cette fonction de x, y, z et de x', y', z' reste invariable quand on transpose x, y, z respectivement avec x', y', z'; et comme elle satisfait à l'équation (2), elle satisfait aussi à

$$\Delta\Delta\Gamma(P, P') = 0;$$

de plus, d'après l'équation (3), elle se réduit à R(P, M), si le point P vient à la surface.

Alors considérons la fonction de x, y, z et de x', y', z',

$$U = R(P, P') - \Gamma(P, P'),$$

elle satisfait aux deux équations $\Delta\Delta U = 0$, $\Delta'\Delta' U = 0$; elle se réduit à zéro quand le point P' vient à la surface, et elle remplit toutes les conditions du lemme.

11. Démontrons maintenant le théorème suivant :

Il existe une fonction, et une seule, qui satisfait à l'équation

$$(f) \qquad \Delta\Delta u = 0$$

dans l'intérieur de la surface σ, qui y varie d'une manière continue avec ses dérivées des trois premiers ordres, et dont la valeur est donnée à la surface ainsi que celle de $\frac{du}{dn'}$.

A cet effet employons la fonction U du lemme précédent; mais remplaçons x, y, z par les lettres a, b, c, que nous supposerons désigner les coordonnées d'un point intérieur à la surface, et posons

$$\Delta' u = \frac{d^2 u}{da^2} + \frac{d^2 u}{db^2} + \frac{d^2 u}{dc^2}$$

La fonction U satisfait à l'équation

$$\Delta'\Delta' U = 0$$

dans l'intérieur de σ; considérée comme fonction de a, b, c, elle est continue avec ses dérivées des trois premiers ordres, excepté au point (x, y, z), aux environs duquel ΔU se réduit sensiblement à $\frac{2}{r}$, en posant

$$r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2;$$

enfin, U est nul lorsque le point (a, b, c) est à la surface; donc, en appliquant l'équation (7) du n° 8, on aura

$$(g) \qquad 8\pi u = \int \left(u \frac{d\Delta' U}{dn'} - \Delta' U \frac{du}{dn'} \right) d\sigma + \int \Delta' u \frac{dU}{dn'} d\sigma,$$

en mettant a, b, c au lieu de x, y, z dans la fonction u sous le signe intégral. Quand le point (x, y, z) est sur la surface, cette équation n'est plus applicable, parce que la sphère infiniment petite que l'on a employée au numéro cité pour obtenir le terme du premier membre doit être remplacée par une demi-sphère intérieure bornée à σ : ce qui conduit à remplacer le premier membre par $4\pi u$. On a donc

$$(h) \qquad 4\pi u = \int u \frac{d\Delta' U}{dn'} d\sigma - \int \Delta' U \frac{du}{dn'} d\sigma + \int \Delta' u \frac{dU}{dn'} d\sigma,$$

quand (x, y, z) est un point de la surface.

Au moyen de cette équation, u étant donné à la surface ainsi que l'une des quantités $\frac{du}{dn'}$ et $\Delta' u$, on aura l'autre.

Pour le prouver, divisons d'abord la surface σ en un nombre k de parties très-petites que nous désignerons par τ, et écrivons l'équation

$$(k) \qquad 4\pi u = \sum u \frac{d\Delta' U}{dn'} \tau - \sum \Delta' U \frac{du}{dn'} \tau + \sum \Delta' u \frac{dU}{dn'} \tau,$$

en prenant pour toutes les quantités du second membre leurs valeurs moyennes sur chaque élément.

U est fonction de x, y, z, et u, dans le premier membre, est fonction des mêmes coordonnées. Prenons pour le point (x, y, z) successivement le centre de chacun des k éléments de surface, nous obtiendrons ainsi k équations. Donnons aux k quantités $\Delta' u$ telles valeurs que l'on voudra, et nous aurons k équations du premier degré par rapport aux k quantités $\frac{du}{dn'}$. Et ces $\frac{du}{dn'}$ pourront obtenir telles valeurs que l'on voudra ; car, inversement, ces $\frac{du}{dn'}$ étant donnés, on pourra tirer des valeurs convenables pour les $\Delta' u$.

Imaginons que les éléments τ deviennent infiniment petits, et nous voyons que, lorsque $\frac{du}{dn'}$ sera connu à la surface, $\Delta' u$ sera déterminé par l'équation (h), et si l'on suppose que l'on en déduise sa valeur, on aura u par l'équation (g), dont le second membre ne renfermera plus rien d'inconnu.

Il est d'ailleurs facile de prouver que la fonction u donnée par cette formule satisfera à l'équation (f), et que sa valeur et celle de $\frac{du}{dn'}$ sur la surface σ sont les fonctions données.

D'abord, si nous prenons le $\Delta\Delta$ des deux membres de l'équation (g), cette opération, dans le second membre, ne pourra porter que sur les dérivées de U qui renferment seules x, y, z; donc le $\Delta\Delta$ de chacune de ces intégrales sera nul, et on aura

$$\Delta\Delta u = 0.$$

Reste à prouver que u et $\frac{du}{dn'}$ ont les valeurs voulues sur la surface σ. Pour cela remarquons que nous pouvons former, et d'une seule manière, une fonction v satisfaisant à l'équation $\Delta\Delta v = 0$, dont la valeur à la surface soit celle qui a été donnée pour u, et dont la valeur du Δ sur σ soit celle qui a été calculée ci-dessus pour Δu. Et de même qu'on a posé l'équation (g), on peut poser celle-ci :

$$(g') \qquad 8\pi v = \int u \frac{d\Delta' \mathrm{U}}{dn'} d\sigma - \int \Delta' \mathrm{U} \frac{dv}{dn'} d\sigma + \int \Delta' u \frac{d\mathrm{U}}{dn'} d\sigma,$$

qui, appliquée à la surface, donne

$$(h') \qquad 4\pi u = \int u \frac{d\Delta' \mathrm{U}}{dn'} d\sigma - \int \Delta' \mathrm{U} \frac{dv}{dn'} d\sigma + \int \Delta' u \frac{d\mathrm{U}}{dn'} d\sigma.$$

Or, si on compare l'équation (h) à l'équation (h'), on voit qu'elles ne diffèrent que par les dérivées $\frac{du}{dn'}$, $\frac{dv}{dn'}$; par la comparaison des k équations (k) aux k équations analogues déduites de (h'), on voit que l'on a $\frac{dv}{dn'} = \frac{du}{dn'}$ à la surface. Les seconds membres des équations (g) et (g') sont donc identiques, ce qu'il fallait démontrer

Sur la solution de l'équation $\Delta\Delta u = 0$ en dehors d'une surface fermée.

15. On peut toujours trouver, en dehors d'une surface fermée σ, une fonction de x, y, z qui satisfait à l'équation $\Delta\Delta u = 0$ et telle que u et Δu aient des valeurs données sur la surface σ.

Il suffit de prendre pour u l'expression trouvée au n° **11**,

$$u = w + v, \quad \text{avec} \quad w = \int r\rho\, d\sigma, \quad v = \int \frac{\rho'}{r}\, d\sigma.$$

Car, quoique les dérivées du premier ordre de v, et, par suite, celles de u varient d'une manière discontinue quand on traverse la surface, Δv étant nul partout au dedans et au dehors de σ, il s'ensuit que u et Δu ont les mêmes valeurs à la limite de l'espace intérieur et à la limite de l'espace extérieur.

Supposons que l'on prenne le point (x, y, z) à une très-grande distance R d'un point fixe G situé dans σ; soit g la distance du point G à l'élément $d\sigma$, et ω l'angle de g et de R, on aura

$$r = R\left(1 - \frac{2g}{R}\cos\omega + \frac{g^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

et, par suite, en négligeant les termes très-petits multipliés par $\frac{1}{R}$,

$$u = \int \rho r\, d\sigma = R\int \rho\, d\sigma + \int g\cos\omega\, \rho\, d\sigma.$$

Or on a

$$\cos\omega = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\psi - \psi'),$$

ψ et ψ' étant les longitudes du point (x, y, z) et de l'élément $d\sigma$, et θ, θ' étant les compléments de leurs latitudes par rapport au point G pris pour centre; donc le second terme de cette expression de u est de la forme

$$A\cos\theta + B\cos\theta\cos\psi + C\sin\theta\sin\psi.$$

Réciproquement, si une fonction satisfait partout, à l'extérieur de σ, à l'équation $\Delta\Delta u = 0$, qu'elle soit continue avec ses dérivées des trois premiers ordres, et que, de plus, quand R est très-grand, elle se réduise à la forme

$$MR + A\cos\theta + B\sin\theta\cos\psi + C\sin\theta\sin\psi,$$

M, A, B, C étant des constantes et R, θ, ψ des coordonnées polaires prises par rapport à un point intérieur; cette fonction est alors la

somme du premier et du second potentiel de deux couches qui recouvrent la surface σ.

Il nous serait très-aisé de démontrer ce théorème au moyen des formules (5) et (6) du n° **8**; mais, comme il est beaucoup moins utile que le théorème analogue relatif à l'intérieur de σ, nous nous bornons à l'énoncer. Remarquons aussi que toutes ces conséquences peuvent s'étendre à l'espace situé en dehors de plusieurs surfaces fermées que l'on recouvrirait chacune de deux couches.

Sur l'équation $\Delta v = 0$ réduite à deux variables.

16. Il convient d'étudier à part le cas particulier où les deux équations

$$\Delta v = 0, \quad \Delta\Delta u = 0$$

ne contiennent que les deux coordonnées rectangulaires x et y.

Occupons-nous d'abord de la première qui se réduit à

(1) $$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} = 0.$$

D'après l'équation (3) du n° **7**, nous aurons

$$\int v \Delta v' d\omega - \int v' \Delta v d\omega = \int v \frac{dv'}{dn} ds - \int v' \frac{dv}{dn} ds,$$

$d\omega$ étant l'élément d'une surface plane ω et ds l'élément de son contour, et v et v' sont deux fonctions de x et y qui sont continues ainsi que leurs dérivées.

Posons

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2, \quad v' = \log r,$$

de manière que r représente la distance du point (x, y) au point variable (a, b). Nous aurons, en comptant la normale vers l'intérieur,

(2) $$\int \log r \Delta v \, d\omega = \int v \frac{d \log r}{dn'} ds - \int \log r \frac{dv}{dn'} ds,$$

si le point (x, y) est situé à l'extérieur du cylindre parallèle à l'axe des z et dont la section droite est ω.

Supposons le point (x, y) à l'intérieur de ce cylindre, la formule ne peut être appliquée, parce que $\log r$ devient infini dans l'intérieur de la courbe s. Imaginons un cylindre circulaire de rayon très-petit parallèle à l'axe des z et dont l'axe passe par le point (x, y); nous aurons, en appliquant la formule à l'espace compris entre les deux cylindres,

$$\int \log r\, \Delta v\, d\omega = \int v \frac{d \log r}{dn'} ds + \int_0^{2\pi} v \frac{d \log \alpha}{d\alpha} \alpha\, d\theta$$
$$- \int \log r \frac{dv}{dn'} ds - \int_0^{2\pi} \log \alpha \frac{dv}{d\alpha} \alpha\, d\theta,$$

α étant le rayon du cylindre; quand α tend vers zéro, la quatrième intégrale tend vers zéro et la seconde vers $2\pi v$.

Donc si le point (x, y) est intérieur, on a

$$(3) \qquad \int \log r\, \Delta v\, d\omega = \int v \frac{d \log r}{dn'} ds - \int \log r \frac{dv}{dn'} ds + 2\pi v.$$

17. Supposons ensuite que v représente le potentiel d'une masse cylindrique dont la densité ρ ne varie pas avec z; v en dehors de cette masse satisfera à l'équation (1) et dans cette masse à l'équation

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} = -4\pi\rho.$$

Concevons que ces masses soient situées à l'intérieur du cylindre, et voyons ce que deviennent les équations (2) et (3). Or on a

$$\int \log r\, \Delta v\, d\omega = -\int \log r\, 4\pi\rho\, d\omega = -4\pi \int \log r\, \rho\, d\omega.$$

L'attraction, suivant la loi de la nature, d'une droite homogène dont la densité est 1 a pour valeur $\frac{2}{r}$ à la distance r, et on en conclut facilement que le potentiel des masses est $v = -2\int \log r\, \rho\, d\omega$. On a donc

$$\int \log r\, \Delta v\, d\omega = 2\pi v.$$

Donc, si le cylindre renferme les masses cylindriques attirantes, on a, en appliquant l'équation (2),

$$(4) \qquad 2\pi v = -\int \log r \frac{dv}{dn'} ds + \int v \frac{d \log r}{dn'} ds$$

si le point (x, y) est extérieur au cylindre, et en appliquant l'équation (3)

$$(5) \qquad 0 = -\int \log r \frac{dv}{dn'} ds + \int v \frac{d \log r}{dn'} ds$$

si le point est intérieur au cylindre.

Au lieu d'un cylindre, imaginons une courbe s qui renferme des masses attirantes dont l'attraction de l'unité de masse sur l'unité de masse soit égale à $\frac{2}{r}$: en désignant par v le potentiel de ces masses planes, on aura l'équation (4) si le point (x, y) est extérieur à la courbe, et l'équation (5) si le point est intérieur.

18. Démontrons maintenant ce théorème :

Si une fonction v est assujettie à satisfaire à l'équation

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} = 0$$

dans l'intérieur de la courbe s et à être contenue, ainsi que ses deux dérivées, elle peut être regardée comme le potentiel d'une couche située sur la courbe s, dont l'attraction est représentée par $\frac{2}{r}$.

D'après les considérations du n° **5**, on peut démontrer que l'on peut sur un cylindre indéfini distribuer de la matière d'une manière uniforme sur chaque génératrice, de telle sorte que le potentiel ait une valeur donnée sur chaque génératrice, ou, ce qui revient au même, on peut distribuer sur une courbe plane de la matière dont l'attraction soit représentée par $\frac{2}{r}$ et dont le potentiel ait une valeur donnée en chaque point de la courbe.

Ensuite remarquons que le point (x, y) étant intérieur à s et Δv nul à l'intérieur de cette courbe, on a d'après (3)

$$2\pi v = \int \log r \frac{dv}{dn'} ds - \int v \frac{d \log r}{dn'} ds.$$

Cette quantité v a une certaine valeur sur le contour, et nous pouvons imaginer une couche dont l'attraction ait lieu suivant la loi citée et dont le potentiel ait sur la courbe la même valeur que v. Soit donc V le potentiel extérieur de cette couche, je dis qu'on a d'après l'équation (5)

$$0 = \int \log r \frac{dV}{dn} ds - \int v \frac{d \log r}{dn} ds.$$

En effet, supposons d'abord la masse située à l'intérieur de la courbe s; alors $\frac{dV}{dn}$ est égal à $-\frac{dV}{dn'}$, et il est évident qu'on a cette équation; de plus, cette équation subsiste quelque près que les masses soient de la courbe, et par suite elle aura encore lieu quand elles formeront une couche sur σ; mais alors $\frac{dV}{dn}$ ne sera plus égal à $-\frac{dV}{dn'}$.

Ajoutons les deux équations, et, en divisant par 2π, nous aurons

$$v = \frac{1}{2\pi} \int \log r \left(\frac{dv}{dn'} + \frac{dV}{dn} \right) ds;$$

et les dérivées $\frac{dv}{dx}$, $\frac{dv}{dy}$ donnent les composantes de l'attraction d'une couche suivant la loi indiquée.

Soit ensuite une fonction v qui satisfait à l'équation $\Delta v = 0$ dans tout le plan à l'extérieur de la courbe s et qui reste continue en toute cette étendue avec ses deux dérivées; supposons, en outre, que si le point (x, y) va à une distance très-grande, v se réduise en négligeant $\frac{1}{R^2}$ à l'expression

$$A \log R + \frac{B}{R}, \tag{6}$$

où A *est constant et* R *la distance de ce point à un point fixe* (x_1, y_1)

situé dans la courbe s; alors v pourra être regardé comme le potentiel d'une couche située sur la courbe s dont l'attraction varie en raison inverse de la distance.

Considérons d'abord l'espace compris entre la courbe s et le cercle S dont le centre est au point (x_1, y_1) et le rayon égal à R; si le point (x, y) est situé dans cet espace, on a d'après l'équation (3)

$$\begin{aligned} 0 = &-\int \log r \frac{dv}{dn} ds + \int v \frac{d\log r}{dn} ds \\ &+ \int_0^{2\pi} \log r \frac{dv}{dR} R\, d\theta - \int_0^{2\pi} v \frac{d\log r}{dR} R\, d\theta + 2\pi v, \end{aligned}$$

et si l'on substitue l'expression (6) dans les deux dernières intégrales, on a quatre termes, dont deux se détruisent et dont les deux autres s'annulent quand on fait $R = \infty$; donc l'équation se réduit à

$$2\pi v = \int \log r \frac{dv}{dn} ds - \int v \frac{d\log r}{dn} ds.$$

Nous pouvons imaginer une couche qui recouvre la courbe s et dont le potentiel ait sur cette courbe la même valeur que v. Soit V le potentiel intérieur de cette couche, on a, d'après l'équation (2), qui est applicable puisque le point (x, y) est extérieur,

$$0 = +\int \log r \frac{dV}{dn'} ds - \int v \frac{d\log r}{dn'} ds.$$

En ajoutant les deux dernières équations, on a

$$v = +\frac{1}{2\pi}\int \log r \left(\frac{dv}{dn} + \frac{dV}{dn'}\right) ds;$$

d'où l'on conclut le théorème.

Sur l'équation $\Delta\Delta u = 0$ *réduite à deux coordonnées.*

19. Soit encore

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2;$$

on a

$$\Delta\left(r^2\log r - \frac{r^2}{2}\right) = 4\log r, \quad \Delta\Delta\left(r^2\log r - \frac{r^2}{2}\right) = 0.$$

Posons

$$v = 2\int\int \log r\,\varphi(a, b)\,da\,db, \quad w = \int\int\left(r^2\log r - \frac{r^2}{2}\right)\varphi(a, b)\,da\,db,$$

et regardons ces intégrales doubles comme étendues à une surface Ω; r est la distance du point (x, y) au point variable (a, b). Comme au n° **10**, nous désignerons v et w sous le nom de *premier* et de *second potentiel.* Les dérivées de w par rapport à x et y représentent les composantes d'une attraction qui varie avec la distance proportionnellement à $r\log r$.

Si le point (x, y) est situé hors de la surface attractive Ω, on a

$$\Delta v = 0;$$

s'il s'y trouve renfermé, on a (n° **16**)

$$\Delta v = +4\pi\varphi(x, y).$$

On a ensuite

$$\Delta w = 2v,$$

et par suite

$$\Delta\Delta w = 0 \quad \text{ou} \quad \Delta\Delta w = 8\pi\varphi(x, y),$$

selon que le point (x, y) est en dehors ou en dedans de Ω.

Les définitions précédentes du premier et du second potentiel étant adoptées, il suffit d'appliquer les raisonnements des n^os **11**, **12**, **13**, **14** pour retrouver sur la solution de l'équation $\Delta\Delta u = 0$ réduite à deux dimensions des théorèmes semblables à ceux qu'on avait trouvés pour trois dimensions. On a donc les théorèmes suivants :

1° *Toute fonction qui satisfait à l'intérieur de la courbe s à l'équation*

$$\Delta\Delta u = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d^4u}{dx^4} + 2\frac{d^4u}{dx^2dy^2} + \frac{d^4u}{dy^4} = 0$$

et qui y est continue, ainsi que ses dérivées des trois premiers ordres, est la somme du premier potentiel d'une couche qui recouvre la courbe s

et du second potentiel d'une autre couche mise sur le même contour. Ainsi elle est de la forme

$$\int \left(r^2 \log r - \frac{r^2}{2}\right) \varphi(a, b)\, ds + \int \log r \psi(a, b)\, ds,$$

a, b désignant les coordonnées de l'élément ds du contour et φ et ψ deux fonctions continues quelconques de ces coordonnées.

2° *Il existe une fonction, et une seule, qui satisfait dans l'intérieur de la courbe s à l'équation $\Delta\Delta u = 0$ et aux conditions précédentes de continuité, et pour laquelle*

$$u, \ \Delta u \quad \text{ou} \quad u, \ \frac{du}{dn'}$$

aient des valeurs données sur la courbe s.

Sur l'intégration de l'équation $\Delta\Delta u = 0$.

20. Imaginons que l'on sache trouver une fonction v satisfaisant à l'équation

$$(1) \qquad \Delta v = 0$$

et dont la valeur est donnée arbitrairement sur une surface déterminée σ; v en général s'obtient sous forme d'une série dont les coefficients sont d'abord quelconques et se calculent ensuite d'après la valeur donnée à la surface. Si donc nous prenons v à la surface, nous aurons la fonction la plus générale d'un point de cette surface.

Cela posé, la fonction qui satisfait à l'équation

$$(2) \qquad \Delta\Delta u = 0$$

dans l'intérieur de la même surface est de la forme

$$u = v + \int \rho r\, d\sigma;$$

v sera une série de forme connue, ainsi que ρ qui représente la fonction la plus générale d'un point de la surface; par conséquent, u ren-

fermera deux séries de coefficients, l'une provenant de v, l'autre provenant de ρ, et on aura à les déterminer par deux conditions à la surface.

Nous venons de supposer que les équations (1) et (2) se rapportent à trois coordonnées rectangulaires; supposons ensuite qu'elles ne dépendent plus que de deux coordonnées x et y. Alors l'équation (1) sera remplacée par cette autre

$$(3) \qquad \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} = 0,$$

à laquelle v devra satisfaire dans l'intérieur d'une courbe s. Cette courbe pourra toujours être considérée comme appartenant à une famille de courbes isothermes, c'est-à-dire à une famille de courbes sur chacune desquelles la température peut être la même dans un certain équilibre de température. Et d'après un théorème de M. Lamé, la famille de courbes orthogonale à la première sera elle-même isotherme. Substituons aux coordonnées x et y les coordonnées thermométriques α et β; nous aurons

$$(4) \qquad \frac{d^2 v}{d\alpha^2} + \frac{d^2 v}{d\beta^2} = 0$$

au lieu de l'équation (3), et la courbe s sera représentée par

$$\beta = B,$$

B étant une constante, et par conséquent une fonction d'un point de la courbe s ne dépendra que de α.

La recherche de la fonction v n'offrira pas en général de difficulté, et la solution de l'équation (2), qui peut s'écrire

$$(5) \qquad \frac{d^4 u}{dx^4} + 2\frac{d^4 u}{dx^2 dy^2} + \frac{d^4 u}{dy^4} = 0,$$

sera

$$u = v + \int \left(r^2 \log r - \frac{r^2}{2}\right) ds,$$

ρ étant une fonction d'un point de la courbe s, et par suite une fonction de α, qu'on saura mettre sous la forme d'une série.

On a d'ailleurs

$$ds = \frac{d\alpha}{h} \quad \text{avec} \quad h = \sqrt{\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^2},$$

et comme h doit être pris sur le contour, il est une fonction de α et de B; on a donc

$$(6) \qquad u = v + \int \left(r^2 \log r - \frac{r^2}{2}\right) \varphi(\alpha)\, d\alpha.$$

$\varphi(\alpha)$ n'est pas une fonction absolument arbitraire de α; mais elle peut avoir telles valeurs que l'on veut dans l'étendue où il suffit de faire varier α pour obtenir tous les points du contour.

Proposons-nous de trouver l'équilibre d'élasticité d'une plaque homogène plane et dont l'épaisseur est partout la même. Il s'agit de trouver les déplacements normaux d'un point quelconque de la surface médiane, connaissant ceux de son contour et les inclinaisons des normales au contour sur leurs directions primitives. Ce déplacement u satisfait à l'équation (5) et on se donne u et $\frac{du}{dn}$ ou u et $\frac{du}{d\beta}$, puisque $\frac{du}{dn}$ est égal à $h\frac{du}{d\beta}$ et que h est une fonction connue. Ces deux conditions au contour permettront de déterminer les deux séries de coefficients qui se trouvent dans v et $\varphi(\alpha)$. Nous allons appliquer cette méthode aux cas de la plaque circulaire et de la plaque elliptique.

Équilibre d'élasticité d'une plaque circulaire.

21. La courbe s est un cercle dont on prend le centre pour l'origine des coordonnées, et on substitue aux coordonnées x et y les quantités α et β ou α et R liées aux premières par les équations

$$x = \mathrm{R}\cos\alpha = ae^\beta\cos\alpha, \quad y = \mathrm{R}\sin\alpha = ae^\beta\sin\alpha.$$

Le premier potentiel d'une couche distribuée sur le cercle $\mathrm{R} = a$

où $\beta = 0$ satisfait à l'équation

$$\frac{d^2 v}{d\alpha^2} + \frac{d^2 v}{d\beta^2} = 0,$$

et il est donné à l'intérieur et à l'extérieur par les deux formules

$$v = M_0 \log a + (M_1 \cos\alpha + N_1 \sin\alpha)\frac{R}{a} + \ldots$$
$$+ (M_n \cos n\alpha + N_n \sin n\alpha)\frac{R^n}{a^n} + \ldots,$$
$$V = M_0 \log R + (M_1 \cos\alpha + N_1 \sin\alpha)\frac{a}{R} + \ldots$$
$$+ (M_n \cos n\alpha + N_n \sin n\alpha)\frac{a^n}{R^n} + \ldots.$$

En faisant dans ces deux formules $R = a$, nous aurons la forme de la fonction $\varphi(\alpha)$ qui se trouve dans la formule (6), et nous prendrons

$$\varphi(\alpha) = A_0 + A_1 \cos\alpha + B_1 \sin\alpha + A_2 \cos 2\alpha + B_2 \sin 2\alpha + \ldots,$$

comme cela est d'ailleurs évident, puisque la fonction $\varphi(\alpha)$ ne doit être assujettie qu'à posséder la période 2π.

α_1 et a étant les coordonnées d'un point du contour, α, R celles d'un point de l'intérieur, on a, pour la distance qui les sépare,

$$r = (R^2 - 2aR\cos(\alpha - \alpha_1) + a^2)^{\frac{1}{2}},$$

ou

$$r = a\left(1 - \frac{R}{a} e^{(\alpha-\alpha_1)\sqrt{-1}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{R}{a} e^{-(\alpha-\alpha_1)\sqrt{-1}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Prenons les logarithmes en appliquant le développement de

$$\log(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \ldots,$$

et nous aurons

$$\log r = \log a - \frac{R}{a}\cos(\alpha - \alpha_1) - \frac{1}{2}\frac{R^2}{a^2}\cos 2(\alpha - \alpha_1) - \frac{1}{3}\frac{R^3}{a^3}\cos 3(\alpha - \alpha_1) - \ldots.$$

Pour $R = a$, u et $\frac{du}{dR}$ sont des fonctions données $\theta(\alpha)$ et $\chi(\alpha)$; voyons donc ce que deviennent, pour $R = a$, les deux formules

$$u = v + \int \left(r^2 \log r - \frac{r^2}{2}\right) \varphi(\alpha)\, d\alpha,$$

$$\frac{du}{dR} = \frac{dv}{dR} + 2 \int \log r \left[R - a\cos(\alpha - \alpha_1)\right] \varphi(\alpha)\, d\alpha.$$

Remplaçons $\alpha - \alpha_1$ par θ, désignons par U ce que devient $r^2 \left(\log r - \frac{1}{2}\right)$ quand on fait $R = a$, et nous aurons

$$\begin{aligned} U &= 2a^2(1 - \cos\theta)\left(\log a - \frac{1}{2} - \cos\theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta - \frac{1}{3}\cos 3\theta - \ldots\right) \\ &= 2a^2\left[\log a - \left(\log a + \frac{1}{4}\right)\cos\theta + \frac{1}{6}\cos 2\theta + \frac{1}{24}\cos 3\theta + \ldots \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{n(n^2 - 1)}\cos n\theta + \ldots\right]. \end{aligned}$$

Alors, en ayant égard aux formules

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 n\alpha\, d\alpha = \pi, \qquad \int_0^{2\pi} \cos n\alpha \cos n'\alpha\, d\alpha = 0,$$

où n et n' sont des nombres entiers différents, on trouve pour la première condition au contour

$$\begin{aligned} & M_0 \log a + 4\pi a^2 \log a\, A \\ & \quad + \left[M_1 - 2\pi a^2\left(\log a + \frac{1}{4}\right) A_1\right]\cos\alpha_1 \\ & \quad + \left[N_1 - 2\pi a^2\left(\log a + \frac{1}{4}\right) B_1\right]\sin a_1 + \ldots \\ & \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \qquad + \left(M_n + \frac{2\pi a^2}{n(n^2 - 1)} A_n\right)\cos n\alpha_1 \\ & \qquad + \left(N_n + \frac{2\pi a^2}{n(n^2 - 1)} B_n\right)\sin n\alpha_1 + \ldots = \theta(\alpha_1). \end{aligned}$$

D'une semblable manière on obtient, pour la seconde condition au

contour,

$$
\begin{aligned}
4a\pi\left(\log a + \frac{1}{2}\right)A_0 &+ \left[\frac{M_1}{a} - 2a\pi\left(\log a + \frac{1}{2}\right)A_1\right]\cos\alpha_1 \\
&+ \left[\frac{N_1}{a} - 2a\pi\left(\log a + \frac{1}{2}\right)B_1\right]\sin\alpha_1 \\
&+ \left(\frac{2M_2}{a} + \frac{2a\pi}{6}A_2\right)\cos 2\alpha_1 + \ldots \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \left(\frac{nM_n}{a} + \frac{2a\pi}{n(n^2-1)}A_n\right)\cos n\alpha_1 \\
&+ \left(\frac{nN_n}{a} + \frac{2a\pi}{n(n^2-1)}B_n\right)\sin n\alpha_1 + \ldots = \chi(\alpha_1).
\end{aligned}
$$

Dans chacune de ces équations on sait calculer le coefficient de $\cos n\alpha_1$, ce qui permet de déterminer M_n et A_n, et on obtient de même N_n et B_n. Les deux séries de coefficients qui entrent dans la formule qui donne u sont donc connues.

Équilibre d'élasticité d'une plaque elliptique.

22. La courbe s est une ellipse dont on prend les axes de symétrie pour axes des x et des y; substituons à x et y les coordonnées thermométriques α, β données par les formules

$$x = c\,\frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2}\cos\alpha, \quad y = c\,\frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2}\sin\alpha,$$

où c représente la demi-distance focale et e la base des logarithmes népériens.

Occupons-nous d'abord du premier potentiel d'une couche distribuée sur l'ellipse du contour, que nous supposerons avoir pour équation

$$\beta = b.$$

D'après les formules précédentes, x et y ne changent pas : 1° quand on remplace α par $\alpha + 2\pi$; 2° quand on remplace α et β par $-\alpha$ et $-\beta$; il en résulte que le potentiel intérieur φ doit satisfaire à la même con-

dition, et on en conclut aisément

$$v = k_0 + k_1 \cos\alpha \frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{e^{b} + e^{-b}} + l_1 \sin\alpha \frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{e^{b} - e^{-b}} + \ldots$$
$$+ k_n \cos n\alpha \frac{e^{n\beta} + e^{-n\beta}}{e^{nb} + e^{-nb}} + l_n \sin n\alpha \frac{e^{n\beta} - e^{-n\beta}}{e^{nb} - e^{-nb}} + \ldots.$$

Au reste, on verra facilement qu'on arrivera au terme général de cette formule en le prenant d'abord égal à

$$T = \cos n\alpha (H e^{n\beta} + I e^{-n\beta}) + \sin n\alpha (K e^{n\beta} + L e^{-n\beta}),$$

et exprimant que T, $\frac{dT}{dx}$, $\frac{dT}{dy}$ diffèrent très-peu pour deux points symétriques par rapport à la distance des foyers, et qui en sont très-rapprochés.

On a ensuite, pour le potentiel en un point extérieur,

$$V = k_0 \frac{\log \frac{ce^{\beta}}{2}}{\log \frac{ce^{b}}{2}} + (k_1 \cos\alpha + l_1 \sin\alpha) e^{-(\beta - b)} + \ldots$$
$$+ (k_n \cos n\alpha + l_n \sin n\alpha) e^{-n(\beta - b)} + , \ldots,$$

et les deux séries se confondent pour $\beta = b$.

Venons à la formule qui donne u,

$$u = v + \int \left(r^2 \log r - \frac{r^2}{2} \right) \varphi(\alpha)\, d\alpha.$$

$\varphi(\alpha)$ n'est assujetti qu'à posséder la période 2π, et par conséquent on prendra

$$\varphi(\alpha) = A_0 + A_1 \cos\alpha + B_1 \sin\alpha + A_2 \cos 2\alpha + B_2 \sin 2\alpha + \ldots;$$

α_1, b étant les coordonnées d'un point du contour, et α, β celles d'un point intérieur, on a, pour le carré de leur distance,

$$r^2 = \frac{c^2}{4} [(e^{\beta} + e^{-\beta}) \cos\alpha - (e^{b} + e^{-b}) \cos\alpha_1]^2$$
$$+ \frac{c^2}{4} [(e^{\beta} - e^{-\beta}) \sin\alpha - (e^{b} - e^{-b}) \sin\alpha_1]^2.$$

Ordonnant par rapport à e^{-b}, on a

$$r^2 = \frac{c^2 e^{2b}}{4}\Big\{ 1 - 2[(e^\beta + e^{-\beta})\cos\alpha\cos\alpha_1 + (e^\beta - e^{-\beta})\sin\alpha\sin\alpha_1]e^{-b}$$
$$+ (e^{2\beta} + e^{-2\beta} + 2\cos\alpha + 2\cos\alpha_1)e^{-2b}$$
$$- 2[(e^\beta + e^{-\beta})\cos\alpha\cos\alpha_1 - (e^\beta - e^{-\beta})\sin\alpha\sin\alpha_1]e^{-3b} + e^{-4b}\Big\}.$$

On peut décomposer le second facteur en quatre autres, et on obtient

$$r^2 = \frac{c^2 e^{2b}}{4}\Big\{\Big[1 - e^\beta e^{-(\alpha-\alpha_1)\sqrt{-1}}e^{-b}\Big]\Big[1 - e^{-\beta}e^{-(\alpha+\alpha_1)\sqrt{-1}}e^{-b}\Big]$$
$$\times\Big[1 - e^\beta e^{-(\alpha-\alpha_1)\sqrt{-1}}e^{-b}\Big]\Big[1 - e^{-\beta}e^{(\alpha+\alpha_1)\sqrt{-1}}e^{-b}\Big]\Big\},$$

et en prenant les logarithmes, on a

$$\log r = \log\frac{ce^b}{2} - \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{e^b}\cos\alpha\cos\alpha_1 - \frac{e^\beta - e^{-\beta}}{e^b}\sin\alpha\sin\alpha_1 - \ldots$$
$$- \frac{1}{n}\frac{e^{n\beta} + e^{-n\beta}}{e^{n\beta}}\cos n\alpha\cos n\alpha_1 - \frac{1}{n}\frac{e^{n\beta} - e^{-n\beta}}{e^{nb}}\sin n\alpha\sin n\alpha_1 - \ldots.$$

Pour $\beta = b$, les quantités r^2 et $\log r$ prennent les valeurs suivantes :

$$r^2 = \frac{c^2 e^{2b}}{2}[1 + e^{-2b}\cos 2\alpha_1 + e^{-4b} - (1 + e^{-2b})^2\cos\alpha_1\cos\alpha$$
$$- (1 - e^{-2b})^2\sin\alpha_1\sin\alpha + e^{-2b}\cos 2\alpha],$$
$$\log r = \log\frac{ce^b}{2} - (1 + e^{-2b})\cos\alpha_1\cos\alpha - (1 - e^{-2b})\sin\alpha_1\sin\alpha - \ldots$$
$$- \frac{1 + e^{-2nb}}{n}\cos n\alpha_1\cos n\alpha - \frac{1 - e^{-2nb}}{n}\sin n\alpha_1\sin n\alpha - \ldots.$$

Désignons par U ce que devient la quantité $r^2\left(\log r - \frac{1}{2}\right)$ pour $\beta = b$, et par un calcul long, mais qui n'offre pas de difficulté, on trouve, pour le quotient de U par $\frac{c^2 e^{2b}}{2}$,

$$\mathrm{U} : \frac{c^2 e^{2b}}{2} = \mathrm{L}_0 + \mathrm{M}_0\cos 2\alpha_1 + (\mathrm{L}_1\cos\alpha_1 + \mathrm{M}_1\cos 3\alpha_1)\cos\alpha$$
$$+ (\mathrm{K}_2 + \mathrm{L}_2\cos 2\alpha_1 + \mathrm{M}_2\cos 4\alpha_1)\cos 2\alpha + \ldots$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ [\mathrm{K}_n\cos(n-2)\alpha_1 + \mathrm{L}_n\cos n\alpha_1 + \mathrm{M}_n\cos(n+2)\alpha_1]\cos n\alpha + \ldots$$
$$+ (\mathrm{P}_1\sin\alpha_1 + \mathrm{Q}_1\sin 3\alpha_1)\sin\alpha$$
$$+ (\mathrm{P}_2\sin 2\alpha_1 + \mathrm{Q}_2\sin 4\alpha_1)\sin 2\alpha + \ldots$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ [\mathrm{N}_n\sin(n-2)\alpha_1 + \mathrm{P}_n\sin n\alpha_1 + \mathrm{Q}_n\sin(n+2)\alpha_1]\sin n\alpha + \ldots,$$

en prenant pour les coefficients les valeurs que nous allons indiquer.

On a d'abord, pour les premiers coefficients de la série de cosinus,

$$L_0 = (1 + e^{-4b}) \log \frac{ce^b}{2} + e^{-4b}, \quad M_0 = e^{-2b} \log \frac{ce^b}{2} + e^{-2b} + \frac{1}{2} e^{-6b}.$$

$$L_1 = -(1 + e^{-2b})^2 \log \frac{ce^b}{2} - \frac{1}{4} - e^{-2b} - \frac{5}{4} e^{-4b} - \frac{1}{2} e^{-6b},$$

$$M_1 = -\frac{1}{6} e^{-2b} - \frac{1}{4} e^{-4b} + \frac{1}{12} e^{-8b},$$

$$K_2 = e^{-2b} \log \frac{ce^b}{2} + \frac{3}{4} e^{-2b} + \frac{e^{-6b}}{4},$$

$$L_2 = \frac{1 + 4e^{-4b} - e^{8b}}{6}, \quad M_2 = \frac{-e^{-2b} - 2e^{-6b} + e^{-10b}}{24}.$$

A partir de $n = 3$, les coefficients de cette série sont donnés par une même formule, et on a

$$K_n = -\frac{1}{n(n-1)(n-2)} e^{-2b} - \frac{1}{2(n-1)(n-2)} e^{-2(n-1)b} + \frac{1}{2n(n-1)} e^{-2(n+1)b},$$

$$L_n = \frac{1 + e^{-4b}}{n(n-1)(n+1)} + \frac{e^{-2nb}}{n(n-1)} - \frac{e^{-2(n+2)b}}{n(n+1)},$$

$$M_n = K_{n+2}.$$

On a ensuite, pour les premiers coefficients de la série de sinus,

$$P_1 = -(1 - e^{-2b})^2 \log \frac{ce^b}{2} - \frac{1}{4} + e^{-2b} - \frac{5}{4} e^{-4b} + \frac{1}{2} e^{-6b},$$

$$Q_1 = -\frac{1}{6} e^{-2b} + \frac{1}{4} e^{-4b} - \frac{1}{12} e^{-8b},$$

$$P_2 = \frac{1 - 2e^{-4b} + e^{-8b}}{6}, \quad Q_2 = \frac{-e^{-2b} + 2e^{-6b} - e^{-10b}}{24},$$

et les coefficients qui suivent ont pour valeurs

$$N_n = -\frac{1}{n(n-1)(n-2)} e^{-2b} + \frac{1}{2(n-1)(n-2)} e^{-2(n-1)b} - \frac{1}{2n(n-1)} e^{-2(n+1)b},$$

$$P_n = \frac{1 + e^{-4b}}{n(n-1)(n+1)} - \frac{e^{-2nb}}{n(n-1)} + \frac{e^{-2(n+2)b}}{n(n-1)},$$

$$Q_n = N_{n+2}.$$

Cherchons maintenant l'équation aux limites qui exprime que u est

égal à la fonction $\theta(\alpha_1)$ sur l'ellipse du contour. Pour $\beta = b$, la seconde partie de u qui se réduit à

$$\int_0^{2\pi} U\varphi(\alpha)\,d\alpha$$

sera donnée par la série

$$\begin{aligned}\frac{c^2 e^{2b}\pi}{2}\Big[&(L_0 + M_0\cos 2\alpha_1)\,2A_0 + (L_1\cos\alpha_1 + M_1\cos 3\alpha_1)\,A_1\\ &+ (K_2 + L_2\cos 2\alpha_1 + M_2\cos 4\alpha_1)\,A_2 + \ldots\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+ (P_1\sin\alpha_1 + Q_1\sin 3\alpha_1)\,B_1 + (P_2\sin 2\alpha_1 + Q_2\sin 4\alpha_1)\,B_2 + \ldots\Big].\end{aligned}$$

Reportons-nous à la valeur de v, faisons-y $\beta = b$, et nous avons, pour première équation aux limites,

$$\begin{aligned}k_0 &+ \frac{c^2 e^{2b}\pi}{2}(2L_0A_0 + K_2A_2) + \left[k_1 + \frac{c^2 e^{2b}\pi}{2}(L_1A_1 + K_3A_3)\right]\cos\alpha_1\\ &+ \left[k_2 + \frac{c^2 e^{2b}\pi}{2}(2M_0 + L_2A_2 + K_4A_4)\right]\cos 2\alpha_1 + \ldots\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+ \left[k_n + \frac{c^2 e^{2b}\pi}{2}(M_{n-2}A_{n-2} + L_nA_n + K_{n+2}A_{n+2})\right]\cos n\alpha_1 + \ldots\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+ \left[l_1 + \frac{c^2 e^{2b}\pi}{2}(P_1B_1 + N_3B_3)\right]\sin\alpha_1\\ &+ \left[l_2 + \frac{c^2 e^{2b}\pi}{2}(P_2B_2 + N_4B_4)\right]\sin 2\alpha_1 + \ldots\\ &+ \left[l_n + \frac{c^2 e^{2b}\pi}{2}(Q_{n-2}B_{n-2} + P_nB_n + N_{n+2}B_{n+2})\right]\sin n\alpha_1 + \ldots = \theta(\alpha_1).\end{aligned}$$

Formons ensuite la seconde équation aux limites, en exprimant que, sur le contour, $\dfrac{du}{d\beta}$ est une fonction donnée $\lambda(\alpha)$. On a

$$\frac{du}{d\beta} = \frac{dv}{d\beta} + 2\int r\log r\,\frac{dr}{d\beta}\,\varphi(\alpha)\,d\alpha.$$

Si l'on différentie r^2 par rapport à β et qu'on fasse $\beta = b$, on trouve

$$2r\frac{dr}{d\beta} = \frac{c^2 e^{2b}}{2}(1 - e^{-4b})(1 - \cos\alpha_1\cos\alpha - \sin\alpha_1\sin\alpha).$$

Posons, pour abréger,

$$\frac{c^2 e^{2b}}{2}(1 - e^{-4b}) = j,$$

et pour $\beta = b$, on trouvera

$$\begin{aligned}\frac{2r\log r}{j}\frac{dr}{d\beta} = \mathrm{L}'_0 &+ \mathrm{M}'_0 \cos 2\alpha_1 + (\mathrm{L}'_1 \cos\alpha_1 + \mathrm{M}'_1 \cos 3\alpha_1)\cos\alpha + \ldots \\ &+ [\mathrm{K}'_n \cos(n-2)\alpha_1 + \mathrm{L}'_n \cos n\alpha_1 + \mathrm{M}'_n \cos(n+2)\alpha_1]\cos n\alpha + \ldots \\ &+ (\mathrm{P}'_1 \sin\alpha_1 + \mathrm{Q}'_1 \sin 3\alpha_1)\sin\alpha + \ldots \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ [\mathrm{N}'_n \sin(n-2)\alpha_1 + \mathrm{P}'_n \sin n\alpha_1 + \mathrm{Q}'_n \sin(n+2)\alpha_1]\sin n\alpha + \ldots,\end{aligned}$$

en prenant pour les premiers coefficients

$$\mathrm{L}'_0 = \log\frac{ce^b}{2} + \frac{1}{2}, \qquad \mathrm{M}'_0 = \frac{e^{-2b}}{2},$$

$$\mathrm{L}'_1 = -\log\frac{ce^b}{2} - \frac{3}{4} - e^{-2b}, \quad \mathrm{M}'_1 = \frac{e^{-4b}}{4},$$

$$\mathrm{P}'_1 = -\log\frac{ce^b}{2} - \frac{3}{4} + e^{-2b}, \quad \mathrm{Q}'_1 = \frac{-e^{-4b}}{4}.$$

A partir de $n = 2$, les coefficients suivent une loi générale, et l'on a

$$\mathrm{K}'_n = \frac{e^{-2(n-1)b}}{2(n-1)}, \qquad \mathrm{L}'_n = \frac{1}{n(n-1)(n+1)} - \frac{e^{-2nb}}{n},$$

$$\mathrm{M}'_n = \mathrm{K}'_{n+2} = \frac{e^{-2(n+1)b}}{2(n+1)},$$

$$\mathrm{N}'_n = -\frac{e^{-2(n-1)b}}{2(n-1)}, \qquad \mathrm{P}'_n = \frac{1}{n(n-1)(n+1)} + \frac{e^{-2nb}}{n},$$

$$\mathrm{Q}'_n = \mathrm{N}'_{n+2} = -\frac{e^{-2(n+1)b}}{2(n+1)}.$$

De là il résulte que pour $\beta = b$ l'intégrale

$$2\int r\log r\frac{dr}{d\beta}\varphi(\alpha)d\alpha$$

devient

$$\begin{aligned}\pi j[&(\mathrm{L}'_0 + \mathrm{M}'_0\cos 2\alpha_1)2\mathrm{A}_0 + (\mathrm{L}'_1\cos\alpha_1 + \mathrm{M}'_1\cos 3\alpha_1)\mathrm{A}_1 \\ &+ (\mathrm{K}'_2 + \mathrm{L}'_2\cos 2\alpha_1 + \mathrm{M}'_2\cos 4\alpha_1)\mathrm{A}_2 + \ldots \\ &+ (\mathrm{P}'_1\sin\alpha_1 + \mathrm{Q}'_1\sin 3\alpha_1)\mathrm{B}_1 + (\mathrm{P}'_2\sin 2\alpha_1 + \mathrm{Q}'_2\sin 4\alpha_1)\mathrm{B}_2 + \ldots],\end{aligned}$$

et l'on a pour la seconde équation aux limites

$$\begin{aligned}
&\pi j(2L'_0 A_0 + K'_2 A_2) + [t_1 k_1 + \pi j(L'_1 A_1 + K'_3 A_3)]\cos\alpha_1 \\
&\quad + [2t_2 k_2 + \pi j(2M'_0 + L'_2 A_2 + K'_4 A_4)]\cos 2\alpha_1 + \ldots \\
&\quad + [n t_n k_n + \pi j(M'_{n-2} A_{n-2} + L'_n A_n + K'_{n+2} A_{n+2})]\cos n\alpha_1 + \ldots \\
&\quad + \left(\frac{1}{t_1} l_1 + \pi j(P'_1 B_1 + N'_3 B_3)\right)\sin\alpha_1 + \ldots \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\quad + \left(\frac{n}{t_n} l_n + \pi j(Q'_{n-2} B_{n-2} + P'_n B_n + N'_{n+2} B_{n+2})\right)\sin n\alpha_1 + \ldots = \lambda(\alpha_1),
\end{aligned}$$

en posant en général

$$\frac{1 + e^{-2nb}}{1 - e^{-2nb}} = t_n.$$

25. Il nous reste maintenant à déduire de ces deux équations aux limites les valeurs des quatre séries de coefficients $k_0, k_1, \ldots$; $l_1, l_2, \ldots$; $A_0, A_1, A_2, \ldots$; $B_1, B_2, \ldots$. Il nous suffira de nous occuper des coefficients $k_0, k_1, k_2, \ldots, A_0, A_1, A_2, \ldots$, parce que les autres s'obtiendront de la même manière.

Posons

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\theta(\alpha)\cos n\alpha\, d\alpha = \varphi_n, \quad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\lambda(\alpha)\cos n\alpha\, d\alpha = \psi_n,$$

et, d'après un théorème bien connu, nous avons les deux séries d'équations suivantes :

$$(A)\quad \begin{cases}
2k_0 + c^2 e^{2b}\pi(2L_0 A_0 + K_2 A_2) = \varphi_0, \\
k_1 + \dfrac{c^2 e^{2b}\pi}{2}(L_1 A_1 + K_3 A_3) = \varphi_1, \\
k_2 + \dfrac{c^2 e^{2b}\pi}{2}(2M_0 + L_2 A_2 + K_4 A_4) = \varphi_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
k_n + \dfrac{c^2 e^{2b}\pi}{2}(M_{n-2} A_{n-2} + L_n A_n + K_{n+2} A_{n+2}) = \varphi_n, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{cases}$$

$$(\mathrm{B})\quad\left\{\begin{array}{l}\pi j(2\mathrm{L}'_0\mathrm{A}_0+\mathrm{K}'_2\mathrm{A}_2)=\psi_0,\\ t_1k_1+\pi j(\mathrm{L}'_1\mathrm{A}_1+\mathrm{K}'_3\mathrm{A}_3)=\psi_1,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ nt_nk_n+\pi j(\mathrm{M}'_{n-2}\mathrm{A}_{n-2}+\mathrm{L}'_n\mathrm{A}_n+\mathrm{K}'_{n+2}\mathrm{A}_{n+2})=\psi_n,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right.$$

Ces équations déterminent les coefficients cherchés. On pourrait croire, au premier coup d'œil, qu'il est permis d'après ces équations de se donner arbitrairement A_0 et A_1, et qu'alors seulement on peut obtenir les autres coefficients; mais nous allons voir qu'ils sont entièrement déterminés.

24. Le calcul des coefficients est beaucoup plus facile, lorsque l'excentricité est peu considérable, et nous allons d'abord considérer ce cas.

Alors nous poserons

$$\beta=\varepsilon+\log\frac{2h}{c},$$

h étant une constante. Soit τ la valeur de ε sur l'ellipse de contour $\beta=b$, nous aurons, en posant

$$q=\frac{c^2}{4h^2},$$

les égalités

$$b=\tau+\log\frac{2h}{c},\quad e^{-2b}=qe^{-2\tau},\quad c^2e^{2b}=4h^2e^{2\tau}.$$

Le demi-grand axe de l'ellipse au paramètre β est

$$c\,\frac{e^{\beta}+e^{-\beta}}{2}=h(e^{\varepsilon}+qe^{-\varepsilon});$$

si donc nous désignons par $\mathcal{A}$ le demi-grand axe de l'ellipse de contour, nous aurons

$$he^{\tau}+\frac{c^2}{4he^{\tau}}=\mathcal{A},$$

et par suite

$$he^{\tau} = \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{2};$$

le second nombre est une quantité connue que nous désignerons par η; ainsi nous avons

$$he^{\tau} = \eta, \quad c^2 e^{2b} = 4\eta^2, \quad j = 2\eta^2(1 - q^2 e^{-4\tau}).$$

Remarquons encore que, si l'ellipse se réduit à un cercle, c et q sont nuls, et que, si l'ellipse est très-peu excentrique, q est très-petit.

D'après les transformations précédentes, les équations (A) deviennent, en remettant pour les quantités K, L, M leurs valeurs

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\eta^2\pi} k_0 + \left[(1 + q^2 e^{-4\tau}) \log \eta + q^2 e^{-4\tau}\right] A_0 \\
&\qquad + \left(e^{-2\tau} q \log \eta + \frac{3}{4} e^{-2\tau} q + \frac{q^3 e^{-6\tau}}{4}\right) A_2 = \frac{\varphi_0}{4\eta^2\pi}, \\
&\frac{1}{2\eta^2\pi} k_1 + \left[-(1 + q e^{-2\tau})^2 \log \eta - \frac{1}{4} - q e^{-2\tau} - \frac{5}{4} q^2 e^{-4\tau} - \frac{1}{2} q^3 e^{-6\tau}\right] A_1 \\
&\qquad + \left(-\frac{1}{6} q e^{-2\tau} - \frac{1}{4} q^2 e^{-4\tau} + \frac{1}{12} q^3 e^{-6\tau}\right) A_3 = \frac{1}{2\eta^2\pi} \varphi_1, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
&\frac{1}{2\eta^2\pi} h_n + \left[\frac{-1}{n(n+1)(n+2)} q e^{-2\tau} - \frac{1}{2(n-1)(n-2)} q^{n-1} e^{-2(n-1)\tau}\right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{2n(n-1)} q^{n+1} e^{-2(n+1)\tau}\right] A_{n-2} \\
&\quad + \left[\frac{1 + q^2 e^{-4\tau}}{n(n-1)(n+1)} + \frac{q^n e^{-2n\tau}}{n(n-1)} - \frac{q^{n+2} e^{-2(n+2)\tau}}{n(n+1)}\right] A_n \\
&\quad + \left[-\frac{1}{(n+2)(n+1)n} q e^{-2\tau} - \frac{1}{2(n+1)n} q^{n+1} e^{-2(n+1)\tau}\right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{2(n+2)(n+1)} q^{n+3} e^{-2(n+3)\tau}\right] A_{n+2} = \frac{1}{2\eta^2\pi} \varphi_n.
\end{aligned}$$

Nous transformerons de même les équations (B); mais nous supposerons j remplacé par sa valeur numérique, qui est connue; de sorte que q n'y entrera pas explicitement, et nous ferons de même pour les t_n:

elles deviendront ainsi

$$(2\log\eta + 1)\,\mathrm{A}_0 + \frac{1}{2}\,q\,e^{-2\tau}\mathrm{A}_2 = \frac{1}{\pi j}\,\psi_0,$$

$$\frac{1}{\pi j}\,t_1 k_1 - \left(\log\eta + \frac{3}{4} + q\,e^{-2\tau}\right)\mathrm{A}_1 + \frac{1}{4}\,q^2 e^{-4\tau}\mathrm{A}_3 = \frac{1}{\pi j}\,\psi_1.$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\frac{1}{\pi j}\,n t_n k_n + \frac{q^{n-1}e^{-2(n-1)\tau}}{2(n-1)}\,\mathrm{A}_{n-2} + \left[\frac{1}{n(n-1)(n+1)} - \frac{q^n e^{-2n\tau}}{n}\right]\mathrm{A}_n$$
$$+ \frac{q^{n+1}e^{-2(n+1)\tau}}{2(n+1)}\,\mathrm{A}_{n+2} = \frac{1}{\pi j}\,\psi_n,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Désignons le premier système d'équations par (A′) et le second par (B′). Si l'on néglige d'abord les termes multipliés par q, la première équation (A′) et la première équation (B′) ne renferment que k_0 et A_0; les deuxièmes équations (A′) et (B′) ne renferment que k_1 et A_1, etc.; on peut par conséquent avoir ainsi des valeurs approchées de ces coefficients, et c'est ce qui fait le succès de la forme donnée à ces équations.

Pour calculer ces coefficients, on posera

$$\begin{aligned} k_0 &= \varkappa_0 + \varkappa_1 q + \varkappa_2 q^2 + \dots, & \mathrm{A}_0 &= a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \dots,\\ k_1 &= \mu_0 + \mu_1 q + \mu_2 q^2 + \dots, & \mathrm{A}_1 &= b_0 + b_1 q + b_2 q^2 + \dots,\\ k_2 &= \nu_0 + \nu_1 q + \nu_2 q^2 + \dots, & \mathrm{A}_2 &= c_0 + c_1 q + c_2 q^2 + \dots,\\ &\dots\dots\dots\dots, & &\dots\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

et on substituera dans les équations (A′) et (B′). En égalant les termes indépendants de q, dans les premiers membres, aux quantités des seconds membres, on aura des couples d'équations qui renfermeront des couples d'inconnues

$$\varkappa_0,\ a_0;\quad \mu_0,\ b_0;\quad \nu_0,\ c_0;\quad \dots,$$

et permettront de les déterminer.

Ces quantités étant calculées, on égalera à zéro les termes qui sont multipliés par la première puissance de q dans les premiers membres,

et on aura des couples d'équations qui renfermeront des couples d'inconnues

$$\varkappa_1, a_1; \quad \mu_1, b_1; \quad \nu_1, c_1; \quad \ldots,$$

qu'on obtiendra immédiatement. Puis les termes en q^2 donneront

$$\varkappa_2, a_2; \quad \mu_2, b_2; \quad \nu_2\, c_2; \quad \ldots,$$

et ainsi de suite. Le problème est donc entièrement résolu.

25. Considérons ensuite le cas où l'excentricité de l'ellipse est trop considérable pour qu'on puisse appliquer la méthode précédente.

Reprenons les équations (A) et (B). Le calcul des coefficients à indices pairs est indépendant de celui des coefficients à indices impairs; prenons donc les équations de rang impair, qui renferment seulement les coefficients

$$k_0, h_2, k_4, \ldots; \quad \Lambda_0, \Lambda_2, \Lambda_4, \ldots.$$

Or on reconnaît facilement que, si n est un nombre pair suffisamment grand, on pourra calculer avec suffisamment d'approximation k_0, h_2, ..., h_{n-2}; Λ_0, Λ_2, ..., Λ_{n-2}, au moyen des $\frac{n}{2}$ premières équations des deux systèmes indiqués, en supprimant dans les dernières les termes multipliés par Λ_n et Λ_{n+2}. On calculera donc successivement k_{n-2} et Λ_{n-2}, puis k_{n-4}, Λ_{n-4}; k_{n-6}, Λ_{n-6}, ..., jusqu'à k_0, Λ_0. Les premières de ces quantités, qui sont très-petites, seront calculées évidemment avec beaucoup d'inexactitude; mais l'erreur qui en résultera sur la solution du problème sera très-faible.

Note sur des appareils hydrauliques fonctionnant au moyen de l'aspiration résultant du mouvement acquis d'une colonne liquide : addition à un Mémoire publié dans le tome XI de ce Journal en 1866, p. 283;

PAR M. ANATOLE DE CALIGNY.

La seconde de deux nouvelles machines proposées spécialement pour les épuisements, sur lesquelles j'ai publié un Mémoire dans le tome XI, 2ᵉ série, 1866, de ce Journal, peut être disposée de manière à tirer l'eau avantageusement du bief supérieur. On pourra au besoin diviser en plusieurs parties la hauteur à laquelle on doit élever l'eau, de manière à la faire monter, en définitive, à d'assez grandes hauteurs au moyen de *petits aspirateurs*, étagés comme dans l'appareil décrit par divers Traités de mécanique sous le nom de *de Trouville*. J'ai expliqué, dans le Mémoire précité, comment les soupapes latérales de ces *petits aspirateurs* peuvent être remplacées par des colonnes liquides alternativement suspendues, sans pièce mobile, par la pression atmosphérique[*].

Je me propose de faire quelques études nouvelles sur cette disposi-

[*] Le chemin parcouru dans les siphons renversés que je rappelle doit être moindre que celui qui le serait dans d'autres siphons, si l'extrémité inférieure de chaque tube d'aspiration portait un siphon renversé ayant aussi pour but d'éviter l'emploi d'une soupape, mais par d'autres principes. Ainsi il faudrait que ce qui resterait d'eau dans chaque tube d'aspiration, pour ne pas retomber seulement au niveau immédiatement inférieur, si l'on supprimait chaque clapet de retenue, pût n'y arriver qu'en produisant une oscillation au dessous de ce niveau. Quoique les variations de la tension de l'air se fassent graduellement dans cet appareil, il est difficile de se rendre bien compte *à priori* de ces oscillations et de celles qui peuvent en être la conséquence dans diverses hypothèses, même pour le cas précité, qui est cependant plus simple. Il est donc bien entendu que, tout en indiquant des dispositions intéressantes pour la théorie, je ne propose encore, en général, pour la pratique de cet appareil, que l'emploi des soupapes; ce qui restreint provisoirement la hauteur à laquelle on pourra s'en servir pour élever l'eau sans trop de complication.

tion. J'ajouterai seulement ici que la soupape annulaire, seule pièce mobile indispensable du système, et qui peut d'ailleurs être modifiée de diverses manières, jouit de la propriété de pouvoir débiter plus d'eau, si la chute motrice diminue. Sans entrer ici dans des détails sur cette propriété essentielle, dans beaucoup de circonstances, j'ai pensé qu'il pourrait être intéressant de signaler succinctement, à cette occasion, comme propres à éclairer la question dont il s'agit, quelques expériences sur un des moteurs hydrauliques *fonctionnant au moyen du mouvement acquis d'une colonne liquide* que j'ai publiés dans le tome XII, 2ᵉ série, de ce Journal, 1847.

En signalant un résultat assez important, je rappellerai d'ailleurs, en peu de mots, en quoi consiste cet appareil.

Il résulte de ces expériences que ce système, indéfiniment abandonné à lui-même, fonctionne sous des chutes motrices extrêmement variables en faisant toujours marcher une même pompe élévatoire, plus ou moins vite, il est vrai, selon que la chute motrice est plus ou moins grande. Dans ces expériences, la chute a varié de $3^{m},50$ à 1 mètre, à mesure que l'eau montait dans un des bassins de Chaillot [*], la pompe élévatoire élevant l'eau à plus de 10 mètres au-dessus du niveau du bief supérieur. Les variations dans les hauteurs des niveaux semblent pouvoir être encore bien plus grandes sans que l'appareil s'arrête, et c'est peut-être le seul des moteurs hydrauliques essayés jusqu'à ce jour un peu en grand qui soit dans ce cas.

Il se compose : 1° d'un tuyau fixe descendant du fond du bief supérieur et plongeant, par son autre extrémité, au-dessous du niveau du bief inférieur; 2° d'un corps de pompe fixe alternativement réuni au tuyau fixe inférieur dont on vient de parler, au moyen d'une soupape annulaire, ou *tuyau-soupape*, du genre de celles dites de *Cornwall*; 3° d'un piston fonctionnant dans ce corps de pompe et attelé à la résistance à vaincre, qui était ici une pompe élévatoire ordinaire *à réservoir d'air*.

Quand la soupape établit la communication entre le bief supérieur et l'intérieur du système, il s'engendre de la vitesse dans le tuyau infé-

---

[*] Toutes les expériences que j'ai faites aux bassins de Chaillot avaient un but scientifique. Il ne s'agissait nullement d'en faire des applications dans cette localité.

rieur. Lorsqu'elle interrompt ensuite cette communication en réunissant ce tuyau au corps de pompe qui est en dessus, de manière à ne former qu'un seul et même tuyau, il résulte de cette vitesse acquise une cause de succion qui fait agir le piston d'une manière analogue à celle dont agit le piston d'une machine à vapeur atmosphérique. Mais, si le piston est *plein*, il peut, si l'on veut, rester au-dessous de lui une colonne d'air qui sera dilatée à l'époque dont il s'agit, et qui sera ensuite comprimée lorsque la vitesse sera éteinte dans la colonne liquide inférieure. En effet, celle-ci reviendra ensuite en arrière, étant à son tour aspirée en vertu de cette dilatation. Or la vitesse ascensionnelle engendrée à cette époque est une cause de compression, d'où il résulte que le piston peut se relever *même sans contre-poids*. Mais on conçoit qu'il peut être utile qu'un balancier à contre-poids soit disposé de manière à l'empêcher de se relever plus haut qu'on ne veut. La soupape de Cornwall s'ouvre ensuite d'elle-même; mais il est intéressant de remarquer que c'est seulement après que le piston a été relevé à une hauteur convenable. Ainsi la vitesse ascensionnelle exerce d'abord son action de la manière la plus directe avant sa réaction latérale, qui n'apparaît ici qu'après un temps appréciable. Cette dernière observation n'a encore été faite que pour le cas où une soupape analogue à celle de Cornwall, mais d'une disposition particulière, était convenablement équilibrée par un contre-poids alternativement prépondérant, en vertu des divers phénomènes précités, qui faisait ouvrir la soupape, et était périodiquement soulevé par un principe de succion de l'eau en mouvement.

Il résulte d'ailleurs d'expériences faites depuis ces dernières qu'une soupape de Cornwall plus légère, s'ouvrant au contraire de haut en bas et se relevant d'elle-même, peut marcher sans contre-poids, au moyen des phénomènes de succion développés dans le mouvement de la colonne liquide, et redescendre ensuite d'elle-même, en vertu de son propre poids, quand la pression intérieure est rétablie par le retour de cette colonne. Les mouvements de cette soupape sont alors en sens contraire de ceux qui se présentaient dans la construction où elle avait un balancier à contre-poids; mais je renvoie, pour ces détails, au Mémoire précité de 1866.

NOTE

SUR

LES SINGULARITÉS ÉLEVÉES DES COURBES PLANES;

PAR M. DE LA GOURNERIE.

AVANT-PROPOS.

Dans un Mémoire inséré au VIIe volume du *Quarterly Journal*, M. Cayley a établi que toute singularité d'une courbe plane est *équivalente* à des nombres déterminés de points doubles, de rebroussements, de tangentes doubles et d'inflexions, de telle sorte que lorsque ces quatre nombres sont connus pour toutes les singularités d'une courbe, on peut immédiatement appliquer à cette courbe les trois équations de Plücker, et aussi savoir à quel genre elle appartient d'après sa déficience (*deficiency*), c'est-à-dire d'après la différence qui existe entre les deux nombres de points doubles que son ordre comporte et qu'elle possède réellement. M. Cayley a, de plus, donné des formules pour calculer les quatre nombres qui représentent une singularité, lorsqu'on connaît, pour les différentes branches qui la constituent, des équations distinctes résolues par rapport à l'une des coordonnées. Je me propose de montrer comment on peut déduire ces équations de l'équation générale de la courbe.

Je donnerai ensuite quelques résultats sur les rayons de courbure à un point multiple, et sur les contacts que les différentes branches peuvent avoir les unes avec les autres.

Cette Note est composée de deux Parties; la seconde, entièrement consacrée à des applications, a été, faute de place, rejetée au numéro de janvier du volume suivant.

PREMIÈRE PARTIE.

Équations caractéristiques des différentes branches qui passent à un point multiple.

1. Je considère une courbe algébrique ayant un point multiple, et je suppose qu'en ce point, où je place l'origine des coordonnées, plusieurs branches ont des contacts de divers ordres avec une même droite, qui sera notre axe des abscisses.

Je choisis pour variables l'abscisse x et le rapport u de l'ordonnée à l'abscisse. Quand x est infiniment petit, u a des valeurs infiniment petites de divers ordres, qui correspondent aux branches tangentes à l'axe des abscisses, et des valeurs finies qui déterminent les tangentes des autres branches à l'origine.

Si l'on sait que u a des valeurs de l'ordre $\frac{p}{q}$, on les obtiendra en supposant dans l'équation x et u infiniment petits des ordres 1 et $\frac{p}{q}$, et ne conservant que les termes de l'ordre le moins élevé. L'équation réduite sera de la forme

$$(1)\qquad x^s u^t \left[a u^{nq} + a_1 x^p u^{(n-1)q} + a_2 x^{2p} u^{(n-2)q} + \ldots + a_n x^{np}\right] = 0.$$

Tous les termes sont de l'ordre $\left(s + \frac{p}{q} t + pn\right)$.

En désignant par k une des n racines de l'équation

$$(2)\qquad a\left(\frac{u^q}{x^p}\right)^n + a_1\left(\frac{u^q}{x^p}\right)^{n-1} + a_2\left(\frac{u^q}{x^p}\right)^{n-2} + \ldots + a_n = 0,$$

on aura

$$(3)\qquad u^q - kx^p = 0.$$

Dans tout ce qui suit, les nombres p et q seront considérés comme premiers entre eux, et, par conséquent, les facteurs communs qu'ils

pourraient contenir doivent être reportés dans les exposants de l'équation (2).

L'expression (3) indique une branche composée de q branches partielles [*] tangentes à l'axe des abscisses.

J'ai supprimé les facteurs x^s et u^t. Le second montre que u a t valeurs d'ordres supérieurs à $\frac{p}{q}\cdot$ Les valeurs de u d'ordres inférieurs à cette quantité doivent être considérées comme infinies, et les abscisses qui leur correspondent comme nulles. Le facteur x^s indique donc que les branches pour lesquelles les valeurs de u sont d'ordres inférieurs à $\frac{p}{q}$ possèdent, sur l'axe des abscisses, s points coïncidant avec l'origine, indépendamment de ceux qui forment la multiplicité de ce point singulier.

Si la variable u n'avait pas de valeur de l'ordre $\frac{p}{q}$, le premier membre de l'équation (1) se réduirait à un seul terme $ax^s u^t$. Les exposants s et t conserveraient d'ailleurs les significations que je viens d'indiquer.

2. Dans la seconde Partie, en discutant des courbes particulières, je montrerai que les résultats obtenus à l'article précédent permettent de déterminer facilement les grandeurs principales des valeurs de divers ordres que prend u quand x est infiniment petit du premier ordre; mais, pour connaître la nature d'une branche, il est quelquefois nécessaire d'avoir le second terme du développement de u. Afin de pouvoir l'établir, nous devons d'abord nous rendre compte de la composition de l'équation générale, lorsqu'on y suppose les variables x et u infiniment petites des ordres 1 et $\frac{p}{q}\cdot$

Cette équation, ne contenant que des puissances entières de x et de u, dans l'hypothèse que je viens de faire les ordres des différents termes sont des multiples de $\frac{1}{q}\cdot$ Je vais rechercher s'il peut exister des termes de tous ces degrés fractionnaires, à partir du plus petit,

---

[*] L'expression de *branches partielles* a été introduite par M. Cayley.

qui est $\left(s + \frac{p}{q} t + pu\right)$. Pour abréger, je désignerai cette quantité par $\frac{g}{q}$.

Il s'agit de reconnaître si l'on pourra toujours trouver deux exposants entiers et positifs μ et ν tels, qu'un terme $x^\mu u^\nu$ soit de l'ordre $\frac{g+i}{q}$, i étant un nombre entier déterminé.

On doit avoir

$$\mu + \nu \frac{p}{q} = \frac{g+i}{q}.$$

En appelant $\frac{p'}{q'}$ l'avant-dernière réduite de la fraction continue dans laquelle on peut développer $\frac{p}{q}$, on a

$$pq' - qp' = \pm 1,$$

et les valeurs de μ et de ν sont données par les relations

$$\mu = \mp p'(g+i) + \theta p, \quad \nu = \pm q'(g+i) - \theta q.$$

Le nombre entier θ doit être tel que μ et ν soient positifs. Afin de faire la discussion sans confusion, il faut examiner successivement les formules qui repondent aux deux signes. Dans le cas du signe supérieur, les limites de θ sont

$$\theta > \frac{p'}{p}(g+i), \quad \theta < \frac{q'}{q}(g+i).$$

La seconde inégalité revient à

$$\theta < \frac{p'}{p}(g+i) + \frac{g}{pq} + \frac{i}{pq}.$$

En ayant égard à la valeur de $\frac{g}{q}$, on voit immédiatement que les deux limites de θ comprennent entre elles au moins un nombre entier. On arrive au même résultat, quand on considère le signe inférieur. Il résulte de là que l'équation peut contenir des termes des

ordres $\frac{g+1}{q}$, $\frac{g+2}{q}$, ... J'appelle $\frac{g+i}{q}$ l'ordre des termes les moins élevés qu'elle renferme effectivement, après ceux de l'ordre $\frac{g}{q}$. Je représenterai leur somme par $T_{\frac{g+i}{q}}$, et la somme des termes d'un ordre quelconque h par T_h.

3. Nous allons maintenant chercher le second terme dans le développement de u^q.

En désignant par r la multiplicité de la racine k dans l'équation (2), et négligeant les termes élevés, j'ai

$$(u^q - kx^p)^r T_{\frac{g}{q}-pr} + T_{\frac{g+i}{q}} = 0.$$

Je suppose que le polynôme $T_{\frac{g+i}{q}}$ ne contient pas en facteur $(u^q - kx^p)$; j'examinerai plus loin (n° 5) le cas que j'éloigne. J'appelle u_1 la grandeur principale de u, et j'obtiens

(4) $$u_1^q = kx^p,$$

$$u^q = u_1^q + \sqrt[r]{-\frac{T_{\frac{g+i}{q}}}{T_{\frac{g}{q}-pr}}}.$$

La quantité sous le radical est fonction de x et de u, mais, comme nous ne devons en conserver que le terme de l'ordre le moins élevé, nous pouvons y remplacer u par u_1.

$T_{\frac{g+i}{q}}$ représente une somme de termes de la même forme que le premier membre de l'équation (1). On en éliminera les puissances entières de u_1^q par la relation (4) : les termes ne contiendront plus que des puissances de u_1 inférieures à q, et seront tous composés de la même manière en x et en u_1. Leur somme algébrique donnera une expression $ax^\alpha u_1^\beta$, les exposants α et β étant soumis à la condition

$$\alpha + \beta\frac{p}{q} = \frac{g+i}{q}.$$

On opérera de la même manière sur le dénominateur, et, après

avoir effectué la division, on aura, en désignant par b un coefficient numérique,

$$(5) \qquad u^q = u_1^q + \sqrt[r]{b x^\alpha u_1^\beta},$$

avec la condition

$$(6) \qquad \alpha + \beta \frac{p}{q} = pr + \frac{i}{q}.$$

Je prends la racine q, et ne conservant que les deux premiers termes du développement, j'obtiens

$$(7) \qquad u = u_1 \left[1 + \frac{1}{q^k} \left(b x^{\alpha - pr} u_1^\beta \right)^{\frac{1}{r}} \right].$$

La branche déterminée par la racine multiple k se décompose en qr branches partielles réparties en q groupes.

L'abscisse x étant prise pour infiniment petit du premier ordre, les ordonnées seront infiniment petites de l'ordre $\left(\frac{p}{q} + 1\right)$. La différence des ordonnées de deux branches partielles d'un même groupe est

$$(8) \qquad \frac{p}{q} + 1 + \frac{1}{r}\left(\alpha + \beta \frac{p}{q}\right) - p.$$

En vertu de l'équation (6), cette expression se réduit à

$$\frac{p}{q} + 1 + \frac{i}{qr}.$$

Nous connaissons maintenant l'ordre de la différence de deux ordonnées infiniment petites de deux branches partielles appartenant soit à un même groupe, soit à deux groupes différents, et par suite il serait facile d'appliquer les formules de M. Cayley à une courbe donnée.

Si l'on suppose i égal à l'unité, on aura la plus petite valeur que puisse avoir l'ordre de la différence des ordonnées de deux branches partielles d'un même groupe, et notamment des deux branches d'un rebroussement de seconde espèce.

Si l'on voulait avoir le troisième terme du développement de u, il faudrait poser

$$u = u_1 + \frac{u_1}{qk}\left(b x^{\alpha - pr} u_1^{\beta}\right)^{\frac{1}{r}} + u_2,$$

porter cette valeur de u dans l'équation générale, et déterminer la valeur de u_2.

4. La branche considérée est imaginaire quand k est lui-même imaginaire. Je supposerai k réel et je distinguerai deux cas principaux, suivant que r sera impair ou pair.

I. *r impair.* — A. p impair et q pair : rebroussement de première espèce.

B. p pair et q impair : branche traversée par sa tangente.

C. p et q impairs : branche sans singularité apparente.

II. *r pair.* — D. p impair, q pair, β pair : rebroussement (réel ou imaginaire) à quatre branches, dont deux de chaque côté de la tangente commune.

E. Un rebroussement de seconde espèce dans trois cas :

1° p pair, q impair, α impair.

2° p impair, q impair, α et β l'un pair et l'autre impair;

3° p impair, q pair, β impair.

F. Deux arcs (réels ou imaginaires) ayant l'un avec l'autre un contact plus intime qu'avec leur tangente commune dans deux cas :

1° p impair, q impair, α et β tous deux pairs ou tous deux impairs;

2° p pair, q impair, α pair.

Pour les rebroussements de première espèce avec point double, r et q sont respectivement égaux à 1 et à 2; p est un nombre impair quelconque. L'ordre de l'ordonnée infiniment petite est $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, ..., suivant la valeur de p.

Pour les rebroussements de seconde espèce avec point double, r et q sont respectivement égaux à 2 et à 1; p est un nombre entier quelconque. L'ordre de l'ordonnée infiniment petite est 1, 2, 3, ..., suivant la valeur de p.

5. Lorsque la quantité $(u^q - kx^p)$, se trouvera en facteur dans le polynôme $T_{\frac{g+1}{q}}$, on examinera si les polynômes suivants la renferment également, et on ne conservera avec eux que le premier de ceux qui ne la contiendront pas. On aura alors une équation entre trois infiniment petits $(u^q - kx^p)$, u_1 et x : les deux derniers étant connus, le problème pour obtenir les diverses valeurs du premier est exactement le même que celui qui s'est présenté pour les valeurs de u, et dont la solution a donné la valeur kx^p de u^q. Je donnerai plus loin un exemple de ce calcul.

6. La méthode est applicable pour la recherche des valeurs de u dont la grandeur principale est finie, c'est-à-dire du degré zéro. On peut aussi l'employer lorsque l'équation contient des termes irrationnels.

Le même mode d'investigation peut servir dans plusieurs autres circonstances, notamment lorsqu'on veut reconnaître si l'équation donnée d'un lieu représente une seule courbe ou plusieurs courbes distinctes. Alors, en supposant que l'on connaisse un point du lieu, on pourra, sans résoudre par rapport à une variable, composer l'équation d'une courbe ayant en ce point un contact de plus en plus élevé avec la courbe représentée, et on verra si l'on est conduit à prendre toute l'équation donnée, ou si le calcul se termine en donnant une équation d'un degré moindre.

Courbure d'une branche à un point multiple.

7. On déterminera les rayons de courbure des différentes branches partielles qui composent une branche, à l'aide de son équation caractéristique, en y considérant les variables comme des coordonnées finies. L'équation que l'on obtient ainsi représente en effet une courbe ayant avec la branche un contact élevé. Si la branche est tangente à l'axe des abscisses, les axes étant d'ailleurs supposés rectangulaires, l'expression du rayon de courbure ρ sera

$$\rho = \frac{1}{2}\left(\frac{x^{q-p}}{k}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Le rayon de courbure est nul ou infini, suivant que p est plus petit ou plus grand que q. Il a une grandeur finie quand ces exposants sont égaux entre eux et, par suite, à l'unité, puisque la fraction $\frac{p}{q}$ est irréductible.

Le rayon de courbure à un point de rebroussement de seconde espèce peut avoir une grandeur finie; mais il est nécessairement nul ou infini dans le cas d'un point de rebroussement de première espèce, car p est alors impair et q pair.

Je dois rappeler qu'un rayon de courbure nul n'indique pas nécessairement une singularité apparente. M. Cayley a fait cette remarque à l'occasion de la courbe qui est parallèle à l'ellipse, et qui passe par deux des points de rebroussement de sa développée (*Annali di Matematica*, 1860, p. 314).

8. En réalité, nous avons q rayons de courbure qui correspondent aux q branches partielles [*]. D'après l'équation (3), la branche a sur sa tangente à l'origine $(p+q)$ points réunis en un seul. On doit regarder que chaque branche partielle a en commun avec cette droite un nombre de points égal à $\frac{p+q}{q}$. Suivant que p est plus grand ou plus petit que q, le contact d'une branche partielle avec l'axe des abscisses est plus intime ou moins intime que celui d'une courbe ordinaire avec sa tangente. Lorsque p et q sont égaux, une branche est semblable à un arc ordinaire de courbe pour toutes les affections qui ne dépendent que du premier terme dans le développement de l'ordonnée infiniment petite y, et, par suite, le rayon de courbure doit avoir une grandeur finie.

9. Tout cercle passant par un point multiple de l'ordre q a en commun avec la courbe q points réunis en un seul, et doit être considéré comme osculateur si q est plus grand que 2. Quand un point de rebroussement est simplement double, pour qu'un cercle y soit

---

[*] Si le point considéré était multiple de l'ordre qr, les q rayons de courbure correspondraient aux q groupes de branches partielles.

osculateur, il faut qu'il touche la tangente de rebroussement, mais son rayon reste arbitraire. La longueur ρ donnée par l'équation ci-dessus est le rayon de développée qui forme transition entre les rayons de courbure des points situés en deçà et au delà du point singulier.

Cette considération a quelque importance; elle explique certaines transformations de courbes lieux de centres de courbure. Ainsi, quand on coupe une surface réglée par des plans perpendiculaires à une génératrice singulière, les centres de courbure des sections pour les points situés sur la génératrice forment une hyperbole; et si l'on rend la surface développable en introduisant entre ses paramètres une relation convenable, l'hyperbole se réduit à deux droites dont une est le lieu des centres des cercles tangents à la section qui a un rebroussement au point même de rebroussement [*].

A un point de rebroussement, l'indétermination du centre de courbure est du même genre que l'indétermination de la tangente. Celle-ci amène un abaissement dans l'ordre de la polaire réciproque; la première doit produire un abaissement dans l'ordre de la développée.

[*] *Traité de Géométrie descriptive*, art. 840.

Note sur un appareil à élever de l'eau au moyen des vagues de la mer ou des grands lacs;

Par M. Anatole DE CALIGNY.

J'ai publié dans le tome XIV de ce Journal, 2e série, 1869, la description d'un appareil à faire des épuisements au moyen des vagues. M. Moro m'a fait l'honneur de me consulter sur un autre sujet. Il s'agit, au contraire, d'élever de l'eau au-dessus du niveau de la mer pour des salines. Il a déjà employé pour cela une disposition intéressante qu'il croit avoir retrouvée dans des travaux de l'antiquité, et à laquelle, par cette raison, il donne le nom de *Bocca Etrusca*. Les vagues de la mer s'élèvent le long d'un plan incliné, derrière lequel elles versent de l'eau que ce plan empêche de retourner dans la mer.

Je propose à M. Moro d'employer un appareil en quelque sorte inverse de mon appareil précité. Il suffit de disposer la soupape de ce dernier, de manière à s'ouvrir de dedans en dehors, au lieu de s'ouvrir de dehors en dedans. On conçoit, en effet, que, si un tuyau en forme de L, ouvert à ses deux extrémités, est convenablement évasé du côté de la mer, et si sa partie verticale est convenablement rétrécie d'une manière suffisamment graduelle, il n'est pas même nécessaire qu'il y ait une soupape pour qu'on puisse élever de l'eau par le sommet de la partie verticale quand les oscillations résultant de l'action des vagues sur la bouche évasée seront assez grandes. Mais il est bon de pouvoir profiter au besoin des moindres oscillations pour élever de l'eau, quand on voudra, par une soupape latérale qui empêchera l'eau élevée de rentrer dans la mer. On pourra ainsi faire monter de l'eau à des hauteurs variables, par exemple pour commencer à remplir un réservoir. Il est à peine nécessaire d'ajouter qu'on pourra, si l'on veut, au moyen de quelques dispositions particulières, empêcher quelquefois cette soupape de s'ouvrir, afin de faire verser l'eau par le sommet du tube vertical, quand on aura besoin d'élever l'eau plus haut qu'à l'ordinaire, avec des vagues d'une force suffisante.

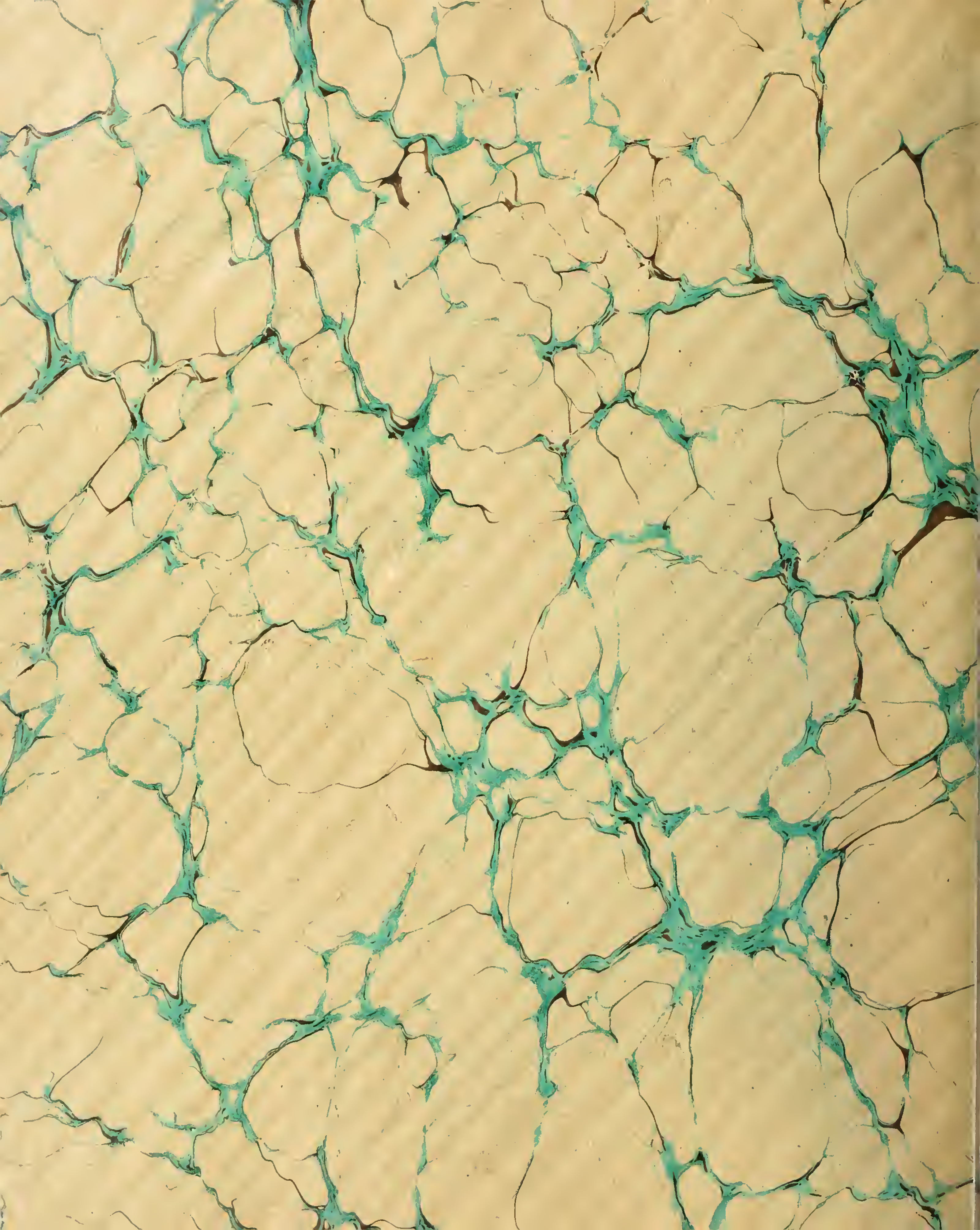
Il paraît que, dans la localité dont il s'agit, les longueurs successives des vagues, prises de crête en crête, sont trop variables pour qu'on puisse compter bien sérieusement sur les *accumulations* d'oscillations dont le principe est décrit dans mon Mémoire précité. Cela simplifie d'ailleurs la construction pour la machine élévatoire. En effet, pour la machine d'épuisement, il est toujours essentiel que l'évasement se fasse d'une manière assez graduelle pour éviter autant que possible la perte de force vive de l'eau à la rentrée de l'oscillation dans la mer. Or si, pour la machine élévatoire, on doit compter principalement sur l'action directe de chacune des vagues, il n'y a plus autant à se préoccuper de rendre aussi graduelles les variations de section de la bouche évasée, et il n'est pas nécessaire non plus que le tuyau formant cette bouche ait une aussi grande longueur. On peut même donner à ce bout de tuyau une longueur aussi petite que le comporteront celles des vagues les plus ordinaires.

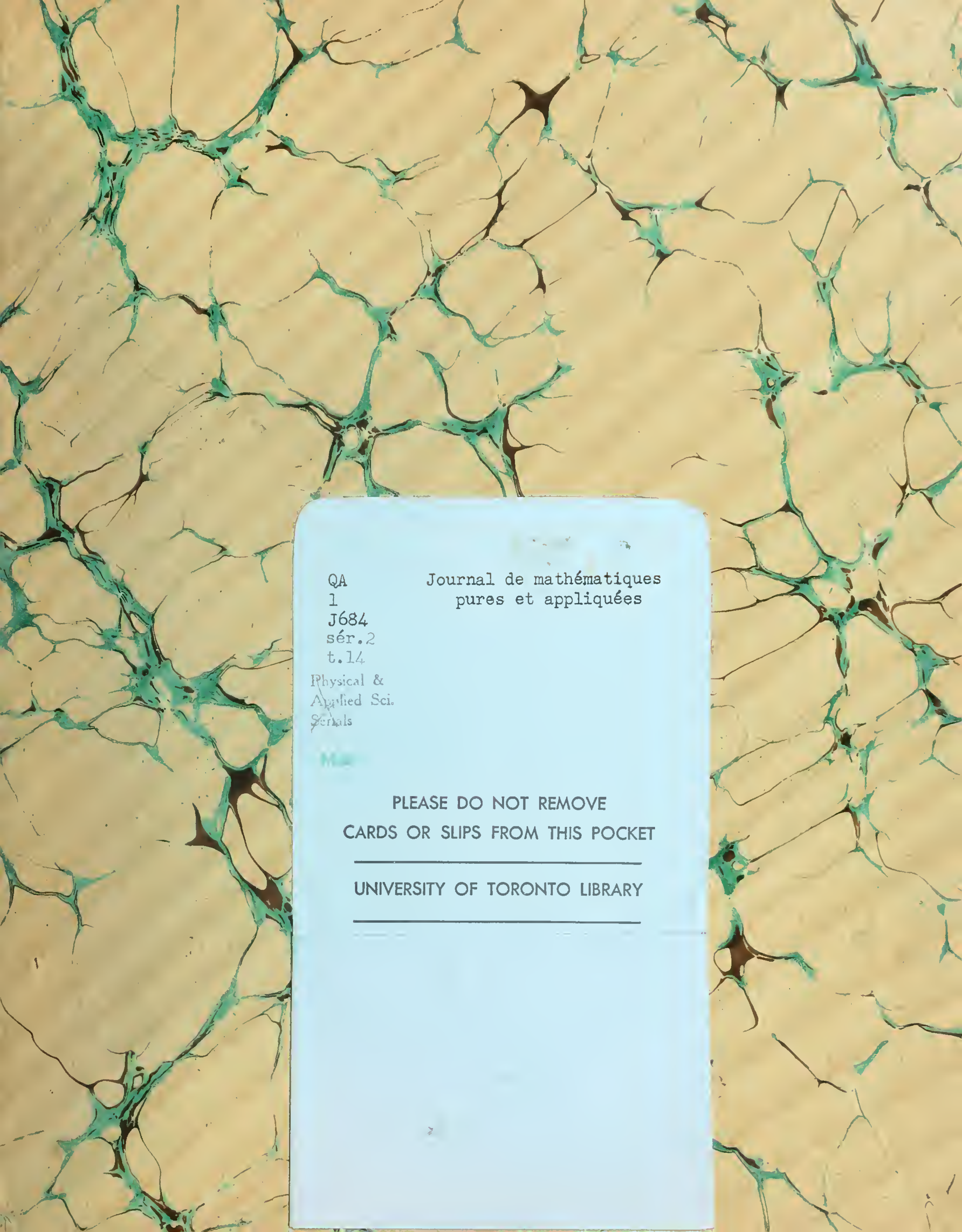
Il est intéressant de remarquer que si, pour la machine d'épuisement, on peut employer, comme je l'ai expliqué, la force centrifuge pour faciliter l'entrée de l'eau à épuiser dans le système, on pourra, au contraire, pour la machine élévatoire, employer la force centrifuge à faciliter l'expulsion de l'eau qui doit être élevée, parce que la soupape pourra alors être disposée dans une chambre en dehors de ce qu'on est convenu d'appeler la partie extérieure du coude. Je n'entrerai pas ici dans les détails de ce genre; mais il y aura lieu d'examiner si un tuyau coudé à angle droit, avec une soupape extérieure à l'angle, n'offrirait pas une disposition convenable, à cause des effets du mouvement dans le tuyau horizontal [*].

[*] Depuis que ce qui précède est écrit, j'apprends que M. Moro a employé, outre la *Bocca Etrusca* fixe, des soupapes s'ouvrant aussi du côté de la terre, de manière à permettre d'élever l'eau à des hauteurs variables. Elles sont d'ailleurs combinées avec des espèces de barrages automoteurs; ce qui présente une disposition générale intéressante. Mais les *pièces fixes* que je propose ont l'avantage de n'être pas sujettes à se déranger, de garder l'eau élevée d'une manière plus sûre et de faire au besoin monter l'eau à des hauteurs beaucoup plus grandes.

FIN DU TOME QUATORZIÈME (2ᵉ SÉRIE).

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER, rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.





QA
1
J684
sér.2
t.14
Physical &
Applied Sci.
Serials
Journal de mathématiques
pures et appliquées
PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET
UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

